


HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT I

Institut für Physik

AG Quantenfeldtheorie und Stringtheorie



Diplomarbeit
zur Erlangung des akademischen Grades des
Diplom Physikers (Dipl.Phys.)

Analytische und algebraische Aspekte von Yang-Mills-Streuamplituden

eingereicht von RALF SATTLER,
geboren am 22.05.1980 in Zeulenroda

3. überarbeitet und korrigierte Fassung

Gutachter: Prof. Dr. Jan Plefka (Institut für Physik)

Prof. Dr. Jochen Brüning (Institut für Mathematik)

Berlin, den 24. Februar 2009

A man with a half volition goes back and forth and makes no progress, even on the smoothest road, whereas a person with a full volition moves ahead steadily no matter how difficult the path.

Thomas Carlyle

Danksagung

Mein erster Dank gilt Prof. Jan Plefka, der mir diese interessante Aufgabe gestellt und die Idee sowie den Mut zu einer fachübergreifenden Arbeit hatte. Daneben danke ich ihm für die Einblicke in den Lehrbetrieb und die Möglichkeit aktiv daran mitzuwirken. Ich möchte mich auch für die ermöglichten Besuche des DESY Workshops in Hamburg sowie des Kompaktkurses „Quantenfeldtheorie auf gekrümmten Hintergründen“ in Potsdam bedanken, bei denen ich die Gelegenheit hatte aktuelle Problemstellungen der theoretischen Physik aus unterschiedlichsten Gebieten kennen zu lernen.

Ebenfalls großer Dank gebührt Prof. Jochen Brüning, der die Herausforderung annahm ein Thema außerhalb seines Fachgebietes zu betreuen. Sein interdisziplinäres Interesse für physikalische Konzepte und deren exakte mathematische Formulierung wird mir stets als positives Vorbild in Erinnerung bleiben. Insbesondere seine ganzheitliche Sicht auf Mathematik, Physik und Philosophie, die er in den Vorlesungen vermittelt hat, waren eine große Inspiration.

Zu besonderem Dank fühle ich mich Herrn Dr. habil Harald Dorn verpflichtet, der stets Zeit für meine Fragen hatte und sie mit einer scheinbar endlosen Geduld erörterte. Gleiches gilt für Dr. Ruth Britto (ITP, Amsterdam) dank deren zahlreicher Hinweise in der Anfangs- und Endphase dieser Arbeit einige falsche Aussagen korrigiert werden konnten.

Ich möchte außerdem die Gelegenheit nutzen mich bei allen derzeitigen und ehemaligen Mitgliedern der Arbeitsgruppe Quantenfeldtheorie der Humboldt Universität zu bedanken, die zu der konspirativen und entspannten Atmosphäre während dieser Zeit beitragen haben. Vor allem aber Sylvia Richter für ihre freundschaftliche Hilfe bei verwaltungstechnischen Anliegen und Problemen des Alltags.

Für die zahlreichen, oftmals humorvollen, Diskussionen über Physik, das Leben und den Rest gebührt meinen Komilitonen Alexander Hentschel, Max Dohse, Andreas Rodigast, Volker Branding, Nicolai Beck, Hai Ngo Thanh, Konstantin Wiegandt und Charlotte Grosse-Wiesmann großer Dank. Vor allem Andreas, Volker und Nicolai sei für ihre Korrekturhinweise zum Skript nochmals herzlich gedankt.

Aus meiner Darmstädter Studienzeit möchte ich mich besonders bei Jan Heffner für die lange Zusammenarbeit sowie die gute Freundschaft bedanken, ohne die vieles sicher nicht möglich gewesen wäre.

Nicht zuletzt bedanke ich mich bei Maria und meiner Familie für ihre kontinuierliche Unterstützung und das Verständnis während meines gesamten Studiums.

Überblick

Die vorliegende Diplomarbeit befasst sich mit der Berechnung von Streuamplituden masseloser Eichfelder auf Baumgraphenniveau. Im Mittelpunkt steht dabei die BCFW Rekursionstechnik, welche eine analytische Bestimmung der Baumgraphenamplituden durch ihre physikalischen Polstellen erlaubt. Grundlage bildet dabei eine algebraischen Reformulierung der perturbativen Theorie, die genauso wie der Rekursionsmechanismus zunächst ausführlich studiert werden. Davon ausgehend erfolgt eine detaillierte Untersuchung des Lösungsvorschlages für so genannte Split Helicity Amplituden.

Als Ergebnis der sorgfältigen Analyse konnten zum einem Unstimmigkeiten in der bestehenden Lösung und deren Beweis behoben werden. Zum anderen war es möglich mittels eines zweiten Lösungsansatzes eine konsistente Gesamtlösung zu konstruieren, die den Paritätseigenschaften der Theorie genügt. Basierend auf der BCFW Rekursion wurde darüber hinaus ein Konstruktionsverfahren für beide Ansätze extrahiert. Es erlaubt auch Aussagen über Amplituden mit komplizierterer Helizitätsstruktur zu treffen. Darauf aufbauend konnten erste Ergebnisse für einen weiteren Amplitudentyp erreicht werden.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	vii
1. Farbordnung von $SU(N)$ Yang-Mills-Amplituden	1
1.1. Feynmanregeln	2
1.2. Neustrukturierung der Feynmangraphen	4
1.3. Farbzerlegung von Gluonbaumgraphen	7
1.4. 1-Schleifen Gluongraphen	8
1.5. Baumgraphen mit externem Fermionpaar	9
1.6. Zusammenfassung	10
2. Weyl-van-der-Waerden Formalismus	11
2.1. Grundlagen des 2d Spinorkalküls	12
2.2. Lichtkegelvektoren des Minkowskiraumes	13
2.3. Masselose Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen	14
2.4. Masselose Spin-1-Teilchen	15
2.5. Zusammenfassung	17
3. Das Amplitudenkalkül für Gluonbaumgraphen	19
3.1. Konstruktive Analyse von Graphen	20
3.2. Helizitätsamplituden	21
3.3. Der CSW Zugang zur Berechnung von Übergangsamplituden	23
3.4. Die BCFW Rekursion	25
3.4.1. Eine einfache Ableitung der BCFW Rekursionsformel	26
3.4.2. Hinweise zum Einsatz der Rekursionsformel in der Praxis	29
3.4.3. Beweis der Parke-Taylor Formel	31
3.5. Zusammenfassung	34
4. Split Helicity Gluonamplituden	35
4.1. Motivation	36
4.2. Die MHV -Lösung	37
4.3. Die \overline{MHV} -Lösung	40
4.4. Die symmetrische Lösung	42
4.5. Induktionsbeweis der MHV -Lösung	43
4.5.1. Ableitung eines rekursiven Zusammenhangs	43
4.5.2. Die Fälle $q \leq 3$	49

Inhaltsverzeichnis

4.5.3. Der Bereich $3 < q < n - 1$	52
4.5.4. Die Fälle $q > n - 1$	55
4.6. Induktionsbeweis der \overline{MHV} -Lösung	55
4.7. Konstruktion der MHV -Lösung	57
4.8. Konstruktion der \overline{MHV} -Lösung	62
4.9. Zusammenfassung	64
5. Contaminated Split Helicity Amplituden	65
5.1. Klassifizierung und Besonderheiten	66
5.2. Konstruktive Zerlegung des p-Typs	66
5.2.1. Betrachtung der äußeren Terme	67
5.2.2. Betrachtung der mittleren Terme	72
5.3. Konstruktive Zerlegung des n-Typs	73
5.3.1. Betrachtung der äußeren Terme	74
5.3.2. Betrachtung der mittleren Terme	76
5.4. Berechnung im $NMHV$ Fall	77
5.5. Zusammenfassung	80
6. Fazit und Ausblick	81
A. $\mathfrak{su}(N)$ Algebra	83
B. Zerlegung von $\mathfrak{so}(1, 3)$	85
C. Bracketkalkül	87
D. Zerlegung von $A_{4,n-4}$	91
Literaturverzeichnis	97

Einleitung

Quantenfeldtheorie ist eine Sammlung verschiedenster mathematischer und physikalischer Konzepte, die heute zu *den* erfolgreichsten Methoden in der Physik zählt. Ihr Ursprung und die größten Erfolge liegen in der Elementarteilchen- und Kernphysik, wo seit jeher das Studium perturbativer Effekte von entscheidender Bedeutung ist. Konzeptionell haben sich in diesem Bereich der Physik die, erstmals von Yang und Mills 1954 vorgeschlagenen, Eichtheorien etabliert. Leider erweisen sich aber die, aus den zugehörigen Feynman Regeln folgenden, Rechenmethoden als zu ineffizient.

Im Laufe der Jahrzehnte wurde eine Vielzahl von Ansätzen und Techniken entwickelt, um die Situation zu verbessern. Insbesondere das Konzept der *Farbordnung* bedeutete eine enorme Verbesserung, da es aufgrund von Eichinvarianz redundante Amplituden zusammenfasst. Obwohl die zugrunde liegende Idee schon 1976 vollständig ausgearbeitet vorlag {1}, dauerte es nahezu 10 Jahre bis ihr Nutzen erkannt und daraus ein wirkungsvolles Kalkül entwickelt wurde. Doch bis heute findet sich dieser Zugang nicht in den Standardlehrbüchern der Quantenfeldtheorie, während vergleichbare Texte zur Stringtheorie den Gedanken aufnehmen. Kapitel 1 beschäftigt sich daher ausführlich mit dieser algebraischen Reformulierung der perturbativen Theorie, die zu einer Projektion auf die Basiselemente der Algebra führt.

Ein zweite wichtige Entwicklung war die zunehmende Verwendung von Weyl-spinoren. Das damit verbundene *Helizitätskalkül* führte im masselosen Sektor zu überraschenden Vereinfachungen. Vor allem das beeindruckende Ergebnis von Parke und Taylor 1986 {2} für *MHV* Amplituden weckte viele Hoffnungen. So wurde im folgenden Jahr eine erste ernst zunehmende Rekursionsformel für Baumgraphen entwickelt {3}, die unter anderem die *Parke-Taylor Formel* bewies. Kapitel 2 und in Teilen Kapitel 3 vollziehen hier die wichtigsten Entwicklungen nach, da sowohl der Spinorformalismus als auch die Ergebnisse des Helizitätskalküls essenziell für die späteren Rechnungen sind.

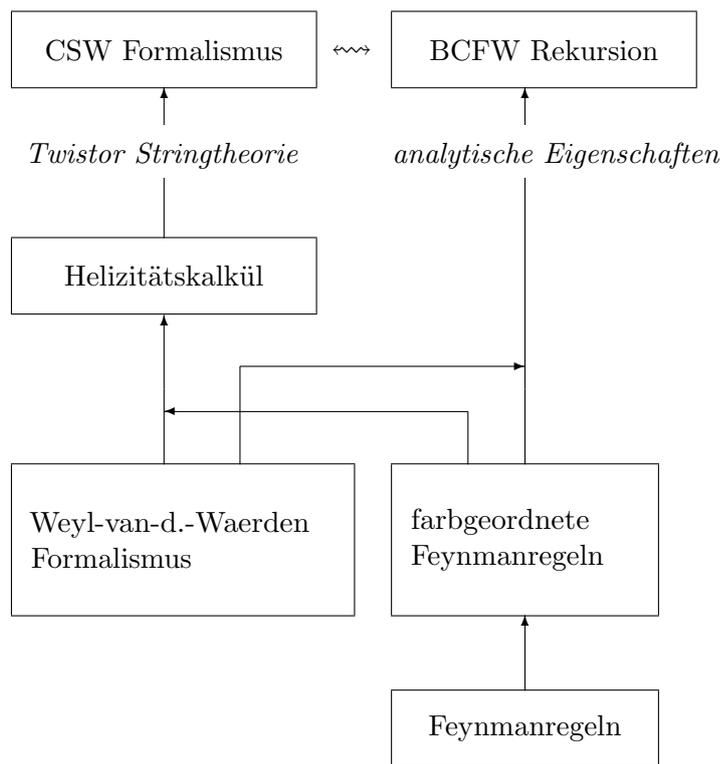
Bei Schleifendiagrammen sah die Situation trotz alledem nicht so gut aus. Erst 1994 mit Aufkommen der Methode der „*generalized unitarity*“ {4} wurde der lang ersehnte Durchbruch erreicht. Dabei folgte man einer aus den 60er Jahren stammenden Idee, welche die Unitarität der *S*-Matrix und ihre analytischen Eigenschaften zu nutzen versuchte {5}. Allerdings hatte der Zugang bis dato ein großes Manko, er war auf $2 \rightarrow 2$ Streuvorgänge beschränkt, und infolge dessen wurde er nicht weiter beachtet. Der Grundgedanke der erneuerten Methode besteht nun darin, das Schleifendiagramm durch Schnitte in Baumgraphen zu zerlegen, wobei die zusätzlichen Beine wie externe

Partikel behandelt werden. Den Durchbruch verdankt diese Methode jedoch einer, auf den Feynmanregeln abgeleiteten, skalaren Integralbasis auf Einschleifenniveau. Mit dieser war eine systematische Anwendung der Unitaritätstechnik möglich, verlangte aber gleichzeitig nach einer stetig anwachsenden Zahl von Baumdiagrammen, gerade in nicht supersymmetrischen Theorien. Hierfür waren die damaligen Methoden aber nur bedingt geeignet.

Lange Zeit gab es keine nennenswerte Verbesserung, bis es vor ca. vier Jahren zu zwei unabhängigen Entwicklungen kam, die die entscheidende Wende bedeuteten. Eine von ihnen beruhte maßgeblich auf einer Idee von E. Witten {6}, wonach der perturbative Sektor der Yang-Mills-Theorie durch eine bestimmte Stringtheorie im Twistorraum beschrieben werden kann. Es zeigt sich dabei, dass *MHV* Amplituden und Vertices topologisch äquivalente Objekte sind. Darauf aufbauend ersetzt der *CSW Formalismus* Vertices durch *MHV* Amplituden {7}.

Nahezu zeitgleich brachten Berechnungen von 1-Schleifendiagrammen mittels der „generalized unitarity“ Methode die *BCF Rekursionsformel* hervor {8}. Ein Beweis in Zusammenarbeit mit E. Witten zeigte dann die Universalität des Konzeptes und seine Verbindung zum *CSW Formalismus* auf. Rasch etablierte sich das so entstandenen Amplitudenkalkül, mit Anwendungen bei 1-Schleifendiagrammen {9}, im massiven Sektor {10}, und sogar der Gravitation {11}.

Doch es gibt immer noch offene Probleme. So ist einerseits das Anliegen systematisch kompakte Formeln für Amplituden mit großer Anzahl externer Beine zu produzieren kaum erreicht wurden. Die Anzahl der Ergebnisse mit geschlossenen Formeln ist rar {12, 13, 14}, und zum Teil beruhen die Resultate auf Ansätzen {13}. Andererseits hat Wittens Idee die Frage über das Entstehen der Parke-Taylor Formel und ihre strukturelle Bedeutung neu entfacht. Während andere Autoren in dieser Frage interessante Fortschritte {15} erreicht haben, untersucht der vorliegende Text das erste Problem. Im verbleibende Teil von Kapitel 3 wird dazu zunächst die *BCFW Rekursion* sowie ihrer Ableitung und Handhabung intensiv studiert. Danach erfolgt in Kapitel 4 die Aufarbeitung der Split Helicity Lösung. Die dort erreichten Ergebnisse bilden die Voraussetzung für Aussagen über weitere Amplitudenklasse, wie sie in Kapitel 5 zu finden sind. Schließlich gibt Kapitel 6 einen kurzen Ausblick auf weitere Möglichkeiten.



Abhängigkeit der einzelnen Konzepte untereinander

1 | **Farbordnung von $SU(N)$ Yang-Mills-Amplituden**

Dieses einleitende Kapitel befasst sich mit der sogenannten Farbordnung von Übergangsamplituden, eine schon lange bekannte gruppentheoretische Methode zur Reduzierung und Vereinfachung der Terme in perturbativen Rechnungen. Physikalisch kann dies als eine effizientere Ausnutzung der Farbsymmetrie verstanden werden.

1.1. Feynmanregeln der $SU(N)$ Yang-Mills-Theorie

Den Startpunkt unserer Betrachtungen bildet eine relativistische Feldtheorie, die eine zusätzliche $SU(N)$ Symmetrie, mit dem Namen Farbe, besitzt. Wir realisieren die Wirkung der Symmetriegruppe auf die Theorie über ihre fundamentale Darstellung. Das zugehörige Lagrangefunktional einer solchen Yang-Mills-Theorie ist dann gegeben durch:

$$\mathcal{L}_{YM} = \bar{\Psi} (i\gamma_\mu D^\mu - m \mathbb{1}_N) \Psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (1.1)$$

mit

$$D_\mu = \partial_\mu \mathbb{1}_N + ig_N \sum_{k=1}^{N^2-1} A_\mu^k T^k$$

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{ig_N} [D_\mu, D_\nu] = \sum_{k=1}^{N^2-1} F_{\mu\nu}^k T^k \quad (1.2)$$

Hierbei ist:

- $\Psi = \Psi_{\alpha, a}$ - ein N dimensionaler Spaltenvektor, bestehend aus 4 dimensionalen Diracspinorfeldern, d.h. $\alpha \in \{1, 2, 3, 4\}$ und $a \in \{1, \dots, N\}$
- $\bar{\Psi} = (\Psi^*)^T \gamma^0$
- A_μ^k - das sogenannte Eichfeld oder affiner Zusammenhang
- T^k - ein Generator der linearen Lie Gruppe $SU(N)$, d.h. $k \in \{1, \dots, N^2 - 1\}$
- D_μ - die kovariante Ableitung
- $F_{\mu\nu}$ - der Feldstärketensor oder auch Krümmungsoperator
- γ_μ - die bekannten Gamma-Matrizen mit $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2 \eta_{\mu\nu}$
 $\eta_{\mu\nu}$ - Minkowski Metrik
- g_N - die Kopplungskonstante der YM Theorie

Bemerkung. Die Bezeichnung Farbe für die Symmetrie ist natürlich an die QCD angelehnt, wo $N = 3$ gilt. Dort heißen die Eichfelder Gluonen, was im allgemeinen auch für grössere N beibehalten wird. Auch wir werden diese Sprechweise im gesamten Text benutzen.

Wir interessieren uns nun für den perturbativen Sektor der obigen Theorie nach Quantisierung. Das entscheidende Handwerkszeug dazu sind zweifelsfrei die Feynman

1.1. Feynmanregeln

Regeln, die sich in die 3 Klassen äußere Linien, Propagatoren und Vertices gliedern lassen. Obwohl wir uns in diesem Kapitel ausschließlich mit den Vertices beschäftigen wollen, stellt Abb. 1.1 alle, aus dem obigen Lagrangefunktional ableitbaren und in diesem Text interessanten, Objekte als kurze Übersicht bereit.

$$\begin{aligned}
 \text{wavy line } A_\mu^i(k) &= \epsilon_{s,\mu}^i(k) \\
 \text{fermion line } \Psi_a \rightarrow \bar{\Psi}_b(p) &= i \frac{\not{p} + m}{p^2 - m_\epsilon^2} \delta_{ab} \\
 \text{wavy line } A_\mu^i A_\nu^j(k) &= -i \frac{1}{k^2} \left[\eta_{\mu\nu} + (\alpha_r - 1) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right] \delta^{ij} \\
 &\stackrel{(\alpha_r=1)}{=} -i \frac{1}{k^2} \eta_{\mu\nu} \delta^{ij} \quad (\text{Feynmangleichung}) \\
 \text{fermion vertex } \Psi_a \rightarrow \bar{\Psi}_b A_\mu^i &= \frac{g_N}{\sqrt{2}} \gamma_\mu (T^i)_{ab} \\
 \text{triple gluon vertex } A_\mu^i A_\rho^k A_\nu^j(p, q, r) &= i \frac{g_N}{\sqrt{2}} f^{ijk} [\eta_{\mu\nu}(p-q)_\rho + \eta_{\nu\rho}(q-r)_\mu + \eta_{\mu\rho}(p-r)_\nu] \\
 \text{four-gluon vertex } A_\mu^i A_\nu^j A_\rho^k A_\tau^l &= -g_N^2 \sum_m \left[f^{mij} f^{mkl} (\eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\tau} - \eta_{\mu\tau} \eta_{\nu\rho}) \right. \\
 &\quad \left. + f^{mil} f^{mjk} (\eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\tau} - \eta_{\mu\tau} \eta_{\nu\rho}) \right. \\
 &\quad \left. + f^{mik} f^{mlj} (\eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\tau} - \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\tau}) \right]
 \end{aligned}$$

Abbildung 1.1.: Die relevanten Feynmanregeln der Yang-Mills-Theorie im Impulsraum (Impulserhaltung am Vertex implizit). Konventionen nach {16}.

In Abb. 1.1 bezeichnen die Faktoren f^{ijk} die Strukturkonstanten der, von den Generatoren $\{T^k\}_{k=1}^{N^2-1}$ aufgespannten, Lie Algebra $\mathfrak{su}(N)$. Sie sind durch die sogenannte Strukturgleichung

$$[T^i, T^j] = if^{ijk} T_k \quad (1.3)$$

vollständig bestimmt. Der Gleichung entnimmt man sofort die

Konsequenz 1.1. *Jeder Vertex besitzt einen von der Symmetriegruppe abhängigen Beitrag, den Farbfaktor.*

1.2. Neustrukturierung der Feynmangraphen

Die zu den Feynmandiagrammen korrespondierenden analytischen Terme erreichen relativ schnell eine komplizierte Struktur, so dass es in der Regel schwer ist Eigenschaften abzulesen, die die Berechnung vereinfachen. Es zeigt sich nun, dass über die Farbfaktoren eine entscheidende Verbesserung der Situation zu erreichen ist. Hierbei stellt sich natürlich die Frage, warum es gerade die Farbfaktoren sind. Als Motivation dazu möchte ich explizit einige Eigenschaften der Farbsymmetrie anführen:

- ◇ Die Farbfaktoren besitzen eine Universalität in dem Sinne, dass ihr Beitrag zur Übergangsamplitude für beliebige Energien gleichgroß ist.
- ◇ Im Gegensatz zu den Kopplungskonstanten besitzen die Farbfaktoren eine reichhaltige algebraische Struktur. Dieser Umstand geht auf die zugrunde liegende Lie Algebra zurück. Dem entsprechend besteht auch die Möglichkeit für geometrische Interpretationen.
- ◇ Die algebraischen Relationen, die zum Einsatz kommen, sind sehr allgemein und damit äußerst stabil gegenüber einer Veränderung der Symmetrie.

Kommen wir damit zu den einzelnen Umformungen und ihren Auswirkungen. Der erste Schritt besteht in der

a) Vereinheitlichung der Farbfaktoren .

Wie Abb. 1.1 zu entnehmen ist, verwendet man sowohl die Strukturkonstanten als auch die Generatoren. Nach Gleichung (1.3) sind beide Farbfaktoren jedoch nicht unabhängig voneinander. Es drängt sich deshalb geradezu auf, einen von beiden zu eliminieren, um so die Anzahl der verwendeten Bausteine zu reduzieren. Da die T^k bereits eine Basis bilden, ist es nur natürlich die Strukturkonstanten durch sie zu ersetzen. Um das zu bewerkstelligen, müssen wir die Strukturgleichung

invertieren.

Mittels eines auf der Algebra $\mathfrak{su}(N)$ eingeführten Skalarproduktes¹ findet man schnell

$$f^{ijk} = -i \operatorname{Sp} \left(T^i [T^j, T^k] \right) = -i \left(T^i [T^j, T^k] \right)_a^a. \quad (1.4)$$

Die Interpretation der Gleichung ist recht einfach, da die linke Seite gerade dem Farbfaktor des kubischen Gluonvertexes entspricht. Demnach assoziiert Gleichung (1.4) zu jedem im Diagramm auftretenden Gluon einen Generator. Nach ausführen dieser Umformung verbleiben noch drei unterschiedliche Typen von Farbfaktorprodukten: die erste Gruppe bestehend nur aus Produkten der T^k , dann eine zweite aufgebaut aus Spuren über Produkte der T^k von beliebiger Länge, schließlich die dritte, welche alle Kombinationen der vorherigen beiden enthält.

b) Vereinfachung der Terme

Nahezu alle Farbbeiträge der einzelnen Diagramme wurden durch den vorherigen Schritt zusätzlich aufgebläht. Um tatsächlich eine Verbesserung zu erzielen, ist es daher dringend notwendig die gewonnenen Terme zu vereinfachen. Hilfreich hierfür erweist sich die immer wieder auftretende Kontraktion in den Indizes der Generatoren, infolge von Symmetriehaltung [17]. Entsprechend den Rechnungen in Anhang A gilt die Kontraktionsgleichung:

$$\sum_{i=1}^{N^2-1} (T^i)_a^b (T^i)_c^d = \delta_a^d \delta_c^b - \frac{1}{N} \delta_a^b \delta_c^d \quad (1.5)$$

Auch hier findet sich schnell eine passende Interpretation. So gibt der Term links vom Gleichheitszeichen die Farbstruktur eines $2 \rightarrow 2$ Fermionenstreuprozesses auf Baumgraphenniveau wieder, während wir auf der rechten Seite die Farbstruktur unterschiedlicher Paarungen von Fermionpropagatoren sehen (s. Abb. 1.2). Gleichung (1.5) bewirkt also eine Eliminierung innerer Gluonenlinien. Wir finden daher

Konsequenz 1.2. Die Farbordnung der Übergangsamplituden bewirkt die bijektive Zuordnung eines Generators T^k je äußerem Gluon A_μ^k .

als Ergebnis der Umformungen. Diese Beobachtung ist von zentraler Bedeutung, da die Gluonen über weitere Eigenschaften wie Energie, Impuls sowie Helizität verfügen.

¹siehe Anhang A

Abbildung 1.2.: diagrammatische Version der Kontraktionsgleichung

Ebenfalls nützlich erweist sich eine weitere, in der Literatur als Fierz Identität bezeichnete, Relation

$$\Gamma = \frac{1}{N} Sp(\Gamma) \mathbb{1}_N + \sum_i T^i Sp(T^i \Gamma). \quad (1.6)$$

Diese Gleichung stellt eine mögliche Formulierung der Eigenschaft dar, dass die Generatoren $\{T^i\}$ zusammen mit der Einheitsmatrix eine Basis von $M(\mathbb{R}^2)$ bilden. Insbesondere erlaubt die Fierz Identität Produkte von kontrahierten Spuren zusammenzuführen:

$$\sum_a Sp(T^a \Gamma_1) (T^a \Gamma_2) = Sp(\Gamma_1 \Gamma_2) \quad \Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathfrak{su}(N). \quad (1.7)$$

Betrachten wir zur Illustration des Formalismus die Wirkung der Manipulationen auf den quartischen Gluonvertex, V_4 und dabei explizit das erste Farbfaktorprodukt.

$$\begin{aligned} \sum_m f^{mij} f^{mkl} &= - \sum_m Sp(T^m [T^i, T^j]) Sp(T^m [T^k, T^l]) \\ &= - \sum_m [Sp(T^m T^i T^j) - Sp(T^m T^j T^i)] Sp(T^m [T^k, T^l]) \\ &= -Sp(T^i T^j T^k T^l - T^j T^i T^k T^l - T^i T^j T^l T^k + T^j T^i T^l T^k) \\ &= -Sp(T^i T^j T^k T^l - T^l T^k T^j T^i) + Sp(T^i T^j T^l T^k + T^k T^l T^j T^i) \\ &= -2 Sp(T^i T^j T^k T^l) + 2 Sp(T^i T^j T^l T^k) \end{aligned}$$

Im letzten Schritt geht die Reflexivität der Spur für die Generatoren ein ². Unter zusätzlicher Nutzung der zykl. Invarianz der Spur folgt schließlich:

$$\begin{aligned} V_4 &= 2 g_N^2 \left[Sp(T^i T^j T^k T^l - T^i T^j T^l T^k) (\eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\tau} - \eta_{\mu\tau} \eta_{\nu\rho}) \right. \\ &\quad + Sp(T^i T^k T^j T^l - T^i T^j T^k T^l) (\eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\tau} - \eta_{\mu\tau} \eta_{\nu\rho}) \\ &\quad \left. + Sp(T^i T^j T^l T^k - T^i T^k T^j T^l) (\eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\tau} - \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\tau}) \right] \end{aligned}$$

²Dies ist eine Konsequenz der Antisymmetrie.

$$\begin{aligned}
 V_4 = 2 g_N^2 & \left[Sp \left(T^i T^j T^k T^l \right) (\eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\tau} + \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\tau}) \right. \\
 & + Sp \left(T^i T^l T^j T^k \right) (\eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\tau} + \eta_{\mu\tau} \eta_{\nu\rho}) \\
 & \left. + Sp \left(T^i T^k T^l T^j \right) (\eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\tau} + \eta_{\mu\tau} \eta_{\nu\rho} - 2\eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\tau}) \right].
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Wir finden damit Konsequenz 1.2 bestätigt. Bei genauerer Untersuchung entdecken wir als weitere Eigenschaft eine subzyklische Summe in den Farbindices. Gleichzeitig besteht jedoch vollständige Disjunktheit hinsichtlich der Permutation aller Farbindices. Solche zusätzlichen Eigenschaften werden offensichtlich immer dann auftreten, wenn es zur Spurbildung über die Generatoren kommt. Doch welche Prozesse korrespondieren zu so einer Farbstruktur? Um diese Fragen zu kären und damit maximalen Nutzen aus dem Formalismus zu schöpfen, ist es unerlässlich nun spezielle Prozessklassen einzeln zu studieren.

1.3. Farbzerlegung von Gluonbaumgraphen

Bei Wechselwirkungen auf Baumgraphenniveau, an denen *ausschließlich* Gluonen beteiligt sind, besteht der Farbanteil eines Graphen immer aus einem Produkt untereinander kontrahierter Strukturkonstanten. Bei Anwendung der Farbordnung ergeben sich daher Summen von Spuren über die Generatoren T^k . Wie die Rechnung am quartischen Gluonvertex gezeigt hat, sind die verbleibenden Summen disjunkt unter Permutation der Farbindices. Die Farbstruktur einer Baumgraphenamplitude mit n externen Gluonen besteht deshalb aus einer Summe über aller nicht zyklischen, nicht reflexiven Spuren von n Generatoren T^k . Aufgrund der Korrespondenz von äußeren Gluonen und Generatoren, kann man die verbleibenden Informationen in einer kondensierten Schreibweise aufsaugen. In dieser ist $\{17\}$,

$$\mathcal{A}_n^{tree}(k_s, \lambda_s, i_s) = g_N^{n-2} \sum_{\sigma \in S_n / \mathbb{Z}_n} Sp \left(T^{i_{\sigma(1)}} \dots T^{i_{\sigma(n)}} \right) A_n^{tree} \left(\sigma(1^{\lambda_1}), \dots, \sigma(n^{\lambda_n}) \right) \tag{1.9}$$

und die $A_n^{tree}(\sigma(1^{\lambda_1}), \dots, \sigma(n^{\lambda_n}))$ heißen Partialamplituden. Hierbei wurden die Impulse mittels $k_a = a$ identifiziert, während $\lambda_a \in \{\pm 1\}$ den Helizitätszustand kennzeichnet. Als Folge der Antisymmetrie des Kommutators und der zyklischen Invarianz der Spur ergibt sich desweiteren, dass über die Menge aller Permutationen S_n ohne die der zyklischen Permutationen \mathbb{Z}_n summiert wird. Die Potenz des Kopplungsfaktors g_N lässt sich leicht anhand der Vertices prüfen, wenn man diese

als einfachste Diagramme wahrnimmt.

Wegen ihrer Kopplung an die Farbfaktoren haben die Partialamplituden den angenehmen Vorteil invariant unter zyklischer Vertauschung der Gluonen und somit der Impulse zu sein. Wir erhalten daher

Konsequenz 1.3. *Propagatorsingularitäten können in farbgeordneten Gluonbaugraphen nur noch aus Summen von zyklisch benachbarten Impulsen stammen.*

welche, wie versprochen, die analytischen Eigenschaften enorm verbessert und einen wesentlichen Bestandteil bei der Konstruktion eines neuen Kalküls in Kapitel 3 bildet.

1.4. Farbzerlegung von 1-Schleifen Gluongraphen

Wesentlich interessanter als der klassische Beitrag sind die Quantenkorrekturen erster Ordnung, die bekanntlich von 1-Schleifen-Diagrammen stammen. Wir wollen deshalb auch ihre Farbbeiträge umschreiben. Mit der oben vorgestellten Prozedur gelangt man zunächst wieder zu Summen von Einzelspuren. Allerdings enthalten diese wegen der Schleifenbildung ein Paar zu kontrahierender Generatoren. Grundsätzlich gibt es dabei 2 unterschiedliche Fälle {18}:

- a) Das zu kontrahierende Paar besteht (nach evtl. Umformung) aus benachbarten Generatoren. In diesem Fall können wir Gleichung (1.5) nutzen. Entsprechend der Indizestellung bei der Spurbildung trägt hier nur der vordere Summand bei:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i_1} Sp(\Gamma_1 T^{i_1} T^{i_1} \Gamma_2) &= \sum_{i_1} (\Gamma_1)_a^b (T^{i_1})_b^c (T^{i_1})_c^d (\Gamma_2)_d^a \\
 &= (\Gamma_1)_a^b \delta_c^c \delta_b^d (\Gamma_2)_d^a \\
 &= N (\Gamma_1)_a^b (\Gamma_2)_b^a \\
 &= N Sp(\Gamma_1 \Gamma_2)
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

- b) Die beiden Generatoren können nicht nebeneinander gebracht werden. In diesem Fall benötigen wir zusätzlich die Fierz Identität (1.6), mit der

$$\sum_{i_1} Sp(\Gamma_1 T^{i_1} \Gamma_2 T^{i_1} \Gamma_3) = Sp(\Gamma_1 \Gamma_3) Sp(\Gamma_2) . \tag{1.11}$$

Interpretieren wir den im ersten Fall erhaltenen Faktor N als die Spur der Einheitsmatrix, so sind wir in der Lage beide Resultate zu vereinheitlichen. Der Farbfaktor ist jetzt immer gleich einer Summe über Produkte von zwei Spuren, wobei die Gesamtlänge beider Argumente jeweils einer Kette aus n Generatoren entspricht. Das Argument der einzelnen Spurfaktoren hingegen variiert innerhalb der Summe

1.5. Baumgraphen mit externem Fermionpaar

zwischen dem Maximalwert (alle n Generatoren) und der Identität (gibt den Faktor N).

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_n^{1-loop}(k_s, \lambda_s, i_s) &= g_N^n \sum_{\sigma \in S_n / \mathbb{Z}_\times} N Sp(T^{i_{\sigma(1)}}, \dots, T^{i_{\sigma(n)}}) A_{n;1}(\sigma(1^{\lambda_1}), \dots, \sigma(n^{\lambda_n})) \\
 &+ g_N^n \sum_{c=2}^{[n/2]+1} \sum_{\sigma \in S_n / S_{n;c}} Sp(T^{i_{\sigma(1)}}, \dots, T^{i_{\sigma(c-1)}}) \\
 &\quad \times Sp(T^{i_{\sigma(c)}}, \dots, T^{i_{\sigma(n)}}) A_{n;c}(\sigma(1^{\lambda_1}), \dots, \sigma(n^{\lambda_n}))
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Tieferegehende Analysen [18, 4] haben gezeigt, dass die Basisobjekte bei der Farbzerlegung von 1-Schleifenamplituden die Amplituden $A_{n;1}(\sigma(1^{\lambda_1}), \dots, \sigma(n^{\lambda_n}))$ sind und primitive Amplituden genannt werden. Alle anderen Amplituden $A_{n;c}$, mit $c \geq 2$, können aus diesen gewonnen werden.

1.5. Farbzerlegung von Baumgraphen mit einem externen Fermionpaar

Aus experimenteller Sicht gehen Prozesse mit Fermionbeteiligung (Quarks) den reinen Gluonenwechselwirkungen voran, so dass ihre Farbzerlegung mindestens von gleichem Interesse sein sollte. Beim Aufbau dieser Diagramme gibt es zwei neue Verknüpfungsmöglichkeiten durch die hinzukommenden Fermion-Gluon-Vertices.

- i) Fermion-Antifermion Kontraktion zur Verknüpfung der Fermion-Gluon-Vertices untereinander im Diagramm. Solche Anteile im Diagramm liefern Produktketten aus Generatoren, da durch die Fermion-Antifermion Kontraktion die Matrix Indizes der beiden zugehörigen T^k verbunden werden.
- ii) Gluonenverknüpfung mit einer reinen Gluonbaumgraphen-Struktur. In diesem Fall kommt es zu einer Kontraktion des Generators vom Fermion-Gluon Vertex mit einem Generator innerhalb eines Spurfaktors. Nach einer evtl. zyklischen Rotation entspricht dieser Ausdruck gerade der rechten Seite von (1.6) für $\Gamma \in \mathfrak{su}(N)$. Sukzessive Anwendung führt somit erneut auf eine Summe von permutierten Generatorproduktketten.

Wir erhalten deshalb insgesamt für Amplituden diesen Typs {17}:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{n, f\bar{f}}^{tree}(k_s, \lambda_s, i_s) &= g_N^{n-2} \sum_{\sigma \in S_n} (T^{i_{\sigma(1)}}, \dots, T^{i_{\sigma(n)}})_{a_2}^{b_1} \\ &\times A_{n, f\bar{f}}^{tree}(f_I^{\lambda_1}, f_{II}^{\lambda_1}, \sigma(1^{\lambda_1}), \dots, \sigma(n^{\lambda_n})) . \end{aligned} \quad (1.13)$$

Dabei beziehen sich die nummerierten Buchstaben natürlich auf das Fermionenpaar.

Eine Verallgemeinerung auf n externe Fermionpaare ist, aufbauend auf den vorherigen Betrachtungen, genauso leicht möglich, wie die Übertragung auf 1-Schleifenprozesse.

1.6. Zusammenfassung

Mit der Abtrennung der Farbfaktoren von den ursprünglichen Amplituden haben wir erste Verbesserungen erreicht sowie verborgene Symmetrien aufgedeckt. Auch wenn die Verbesserungen für die einzelnen Prozessklassen beachtlich sind, der rechnerisch aufwendigere Teil ist mit den kinematischen Größen verbunden, und die haben wir bisher nur in die Partialamplituden bzw. primitiven Amplituden verschoben. Unsere nächste Aufgabe besteht daher darin, effektivere Berechnungsmöglichkeiten für die verbliebenen farbgeordneten Teilamplituden A_n zu finden. Eine wichtige Vorbereitung dazu wird die, im folgenden Kapitel vorgestellte, Darstellung von Tensoren durch zweidimensionale Spinoren sein.

2 | Weyl-van-der-Waerden Formalismus für masselose Partikel

Gerade in der perturbativen Quantenfeldtheorie tauchen Objekte aus den unterschiedlichsten Darstellungen der Lorentzalgebra $\mathfrak{so}(1, 3)$ gemeinsam auf. Als Folge dessen erhält man häufig Terme mit einer Unmenge an zu kontrahierenden Indizes. Eine genauere Analyse zeigt jedoch schnell, dass die meisten Objekte einen gemeinsamen Ursprung haben und deshalb in einer einheitlichen Sprache formuliert werden können. Genau das leistet der Weyl-van-der-Waerden Formalismus (auch Infeld-van-der-Waerden Formalismus bekannt). Er nutzt die bekannte Tatsache, dass $\mathfrak{so}(1, 3) = \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} \otimes \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}}$ ist, um die mit der Lorentzraumzeit verbundenen Objekte in Termen von zweidimensionalen Spinoren zu reformulieren. Aus mathematischer Sicht bedeutet dies eine Rückführung aller höherdimensionalen Darstellungen auf die elementaren, irreduziblen zweidimensionalen Darstellungen $(\frac{1}{2}, 0)$ und $(0, \frac{1}{2})$.

2.1. Grundlagen des 2d Spinorkalküls

Aufbauend auf den Rechnungen in Anhang B treffen wir zunächst die gebräuchliche

Definition 2.1. Die Elemente des Darstellungsraumes

- i) $D(\frac{1}{2}, 0)$ heißen kovariante Spinoren ϕ_A .
- ii) $D(0, \frac{1}{2})$ heißen kontravariante Spinoren $\tilde{\psi}^A$.

Trotz ihrer Inäquivalenz existiert, wegen $\sigma^2 \sigma^i \sigma^2 = -(\sigma^i)^*$, eine bijektive Abbildung von $D(\frac{1}{2}, 0)$ nach $D(0, \frac{1}{2})$ {19}. Diese wird durch eine komplexe Konjugation ($\phi_A \leftrightarrow \phi_{\dot{A}}$), gefolgt von einer Ähnlichkeitstransformation (Heben und Senken der Indizes) vermittelt. So ist

$$\epsilon \phi^* := i \sigma^2 \phi^* \in D\left(0, \frac{1}{2}\right) \quad \text{für} \quad \phi \in D\left(\frac{1}{2}, 0\right). \quad (2.1)$$

Für die Umkehrung ist zu beachten, dass $\epsilon^{-1} = -\epsilon$. Wie üblich sind hierbei σ^k ($k = 1, 2, 3$) die Pauli Matrizen, so dass

$$\epsilon^{AB} = \epsilon^{\dot{A}\dot{B}} = \epsilon_{AB} = \epsilon_{\dot{A}\dot{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Davon motiviert nennen wir ϵ Spinormetrik, mit der

Definition 2.2. Auf $D(\frac{1}{2}, 0)$ existiert ein Lorentz invariantes Spinorprodukt durch

$$\langle \psi, \phi \rangle := \epsilon^{AB} \psi_A \phi_B \quad (2.3)$$

Das dazu korrespondierende Produkt auf $D(0, \frac{1}{2})$ ist,

$$[\psi, \phi] := \epsilon^{\dot{A}\dot{B}} \tilde{\psi}_{\dot{A}} \tilde{\phi}_{\dot{B}} \quad (2.4)$$

und es gilt

$$\langle \psi \phi \rangle^* = [\psi \phi]. \quad (2.5)$$

Genau genommen müsste das Produkt auf $D(\frac{1}{2}, 0)$ mit ϵ^{-1} definiert werden. Die für die späteren Rechnungen relevante Literatur benutzt jedoch die oben getroffene Konvention, so dass diese zur besseren Vergleichbarkeit übernommen wird. Bei einem Vergleich mit einer Rechnung basierend auf den üblichen Feynmanregeln gilt also

Konvention 1. $\eta = -\eta_{QCD}$.

Das innere Produkt auf dem Spinorraum wartet mit zwei, für Rechnungen sehr hilfreichen, Eigenschaften auf:

i) Es ist seiner Definition nach antisymmetrisch,

$$\epsilon^{AB} = -\epsilon^{BA} \quad \Leftrightarrow \quad \langle \psi \phi \rangle = -\langle \phi \psi \rangle \quad \Leftrightarrow \quad \langle \phi \phi \rangle = 0 \quad (2.6)$$

ii) Weil ϵ ein zweidimensionaler antisymmetrischer Tensor ist, existiert zu dem folgende, als Schouten Identität bekannte, Bedingung:

$$0 = \epsilon^{AB} \epsilon^{CD} + \epsilon^{AD} \epsilon^{BC} + \epsilon^{AC} \epsilon^{DB} \quad (2.7)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = \langle \psi \phi \rangle \langle \rho \xi \rangle + \langle \psi \xi \rangle \langle \phi \rho \rangle + \langle \psi \rho \rangle \langle \xi \phi \rangle \quad (2.8)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = \phi_A \langle \rho \xi \rangle + \xi_A \langle \phi \rho \rangle + \rho_A \langle \xi \phi \rangle \quad (2.9)$$

2.2. Lichtkegelvektoren des Minkowskiraumes

Definition 2.3. Sei $\sigma^0 = \mathbb{1}_2$, dann vermitteln die Matrizen

$$\sigma^{\mu, \dot{A}B} = (\sigma^0, \underline{\sigma}) \quad \text{bzw.} \quad \bar{\sigma}^{\mu}_{\dot{A}B} = (\sigma^0, -\underline{\sigma}) \quad (2.10)$$

durch

$$k^\mu \bar{\sigma}_{\mu, \dot{A}B} = \begin{pmatrix} k^0 + k^3 & k^1 + ik^2 \\ k^1 - ik^2 & k^0 - k^3 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} k_+ & k_\perp \\ k_\perp^* & k_- \end{pmatrix} =: K_{\dot{A}B} \quad (2.11)$$

eine Abbildung von der üblichen Vektordarstellung in die Spinordarstellung $D\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = D\left(\frac{1}{2}, 0\right) \otimes D\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Der Definition folgend besitzt jeder Vierervektor $k^\mu = (k^0, \underline{k})$ des Minkowskiraumes eine Darstellung als hermitesche 2×2 Matrix ¹.

Eine weitere wichtige Eigenschaft der Pauli-Matrizen ist die Relation

$$\sigma_{\mu, \dot{A}B} \bar{\sigma}_\nu^{\dot{A}B} = 2\eta_{\mu\nu} \mathbb{1}_2, \quad (2.12)$$

die es uns erlaubt das Minkowski Skalarprodukt in ein Produkt der Bispinoren zu überführen:

$$2(k, p) = 2k^\mu p_\mu = k^\mu 2\eta_{\mu\nu} p^\nu = k^\mu \sigma_{\mu, \dot{A}B} \bar{\sigma}_{\nu, \dot{A}B} p^\nu = K_{\dot{A}B} P^{\dot{A}B}. \quad (2.13)$$

¹Die zusätzlichen Indizes ergeben sich durch Vergleich des Transformationsverhaltens von $K_{\dot{A}B}$ mit dem der ko- bzw. kontravarianten Spinoren.

Insbesondere gilt für Minkowski Lichtvektoren k und p deshalb:

$$(k+p)^2 = 2(k,p) = K_{\dot{A}B} P^{\dot{A}B} = \frac{1}{2}(K+P)^2, \quad (2.14)$$

Um nun unser Ziel, alles in den 2d Spinoren anzugeben, zu verwirklichen, müssen wir die Matrizen $K_{\dot{A}B}$ als dyadische Spinorprodukte darstellen. Mit anderen Worten wir müssen $K_{\dot{A}B}$ diagonalisieren. Wie man leicht nachrechnet, existiert dabei für reelle Lichtkegelvektoren, wegen der Bedingung $k^2 = 0$, nur der Eigenwert $2k^0$, so dass

$$K_{\dot{A}B} = \tilde{\lambda}_{k\dot{A}} \lambda_{k\dot{B}} =: \tilde{k}_{\dot{A}} k_{\dot{B}} \quad (2.15)$$

mit

$$\lambda_{k\dot{A}} = \frac{1}{\sqrt{k_+}} \begin{pmatrix} k_+ \\ k_\perp \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Gleichung (2.15) stellt dabei für uns *das zentrale Ergebnis des Kalküls* dar auf dem alle weiteren Resultate aufbauen. Auch werden wir von der oben eingeführten ökonomischen Schreibweise $\lambda_{k\dot{A}} = k_{\dot{A}}$, wann immer unbedenklich, Gebrauch machen. Ausgestattet mit diesem Wissen können wir nun das Minkowski Skalarprodukt von Lichtkegelvektoren umformulieren zu:

$$2(k,p) = K_{\dot{A}B} P^{\dot{A}B} = \lambda_{k\dot{A}} \tilde{\lambda}_{k\dot{B}} \lambda_p^{\dot{A}} \tilde{\lambda}_p^{\dot{B}} = \langle kp \rangle [k p]. \quad (2.17)$$

2.3. Masselose Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen

Benutzt man die Weyl (= chirale) Darstellung für die Gammamatrizen

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma}^\mu_{\dot{A}\dot{B}} \\ \sigma^\mu_{\dot{A}B} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

so sieht man sofort, dass die Dirac Spinoren Ψ_D der Darstellung $D(\frac{1}{2}, 0) \oplus D(0, \frac{1}{2})$ angehören. Es besteht daher folgender Zusammenhang unter den Spinoren:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_A \\ \tilde{\phi}^{\dot{A}} \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Mit diesen Informationen betrachten wir jetzt die masselose Diracgleichung im Impulsraum:

$$i\not{p} \Psi = 0 \iff P^{\dot{A}B} \psi_B(p) = 0 \quad \wedge \quad P_{\dot{A}\dot{B}} \tilde{\phi}^{\dot{B}}(p) = 0 \quad (2.20)$$

Neben der trivialen Lösung erhalten wir wegen Gleichung (2.15) auch noch

$$\psi_A(p) = c_1 p_A \quad \tilde{\phi}_{\dot{A}}(p) = c_2 \tilde{p}_{\dot{A}}. \quad (2.21)$$

Die Normierung fixiert die Konstanten c_i auf 1. Daher lauten die Fundamentallösungen des Systems:

$$\Psi_1 = \begin{pmatrix} p_A \\ 0 \end{pmatrix} e^{\pm i p x} \quad \Psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{p}_{\dot{A}} \end{pmatrix} e^{\pm i p x}. \quad (2.22)$$

2.4. Masselose Spin-1-Teilchen

Spin-1-Teilchen beruhen auf Vektorfeldern, für die natürlich eine zu Abschnitt 2.1 analoge Spinordarstellung $D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ existiert. Wie im vorherigen Fall betrachten wir zur genaueren Analyse die Bewegungsgleichung:

$$\square A_\mu - \partial_\mu(\partial A) = 0. \quad (2.23)$$

Die masselose Proca Gleichung kann durch Lorenz Eichung in 2 Gleichungen zerlegt werden. Im Impulsraum gilt deshalb:

$$K^{\dot{C}D} A_{\dot{C}D} = 0 \quad (\text{Lorenz Eichung}) \quad (2.24)$$

$$K^{\dot{C}D} K_{\dot{C}D} A_{\dot{E}F} = 0. \quad (2.25)$$

Dabei ist die letzte Gleichung wegen der Bedingung $k^2 = 0$ identisch erfüllt, so dass wir mit der ersten verbleiben. Zur Lösung des Problems benutzen wir impulsabhängige Lichtkegelkoordinaten. Die Basisvektoren der verbleibenden Freiheitsgrade sind die Helizitätsvektoren h_\pm , welche folgenden Bedingungen genügen {20}:

$$(h_\pm, h_\pm) = 0 \quad (2.26)$$

$$(h_\pm)^* = h_\mp \quad (2.27)$$

$$(K, h_\pm) = 0 \quad (2.28)$$

$$(h_\pm, h_\mp) = -1. \quad (2.29)$$

Aus Gleichung (2.26) folgt wegen (2.17) und (2.6) unmittelbar

$$h_{+ \dot{A}B} = \tilde{a}_{\dot{A}} b_B \quad h_{- \dot{A}B} = \tilde{c}_{\dot{A}} d_B, \quad (2.30)$$

und mit (2.27) hieraus

$$\tilde{a}_{\dot{A}} = \tilde{d}_{\dot{A}} \quad b_B = c_B. \quad (2.31)$$

Dieses Resultat eingesetzt in Gleichung (2.28) ergibt:

$$\begin{aligned} K^{\dot{A}B} a_{\dot{A}} b_B &\stackrel{(2.17)}{=} \frac{1}{2} \langle k b \rangle [k a] = 0 \\ \stackrel{(2.6)}{\implies} \tilde{a}_{\dot{A}} &= z \tilde{k}_{\dot{A}} \quad \vee \quad b_B = z k_B \quad (z \in \mathbb{C}) . \end{aligned} \quad (2.32)$$

Wir treffen die Wahl $\tilde{a}_{\dot{A}} = z \tilde{k}_{\dot{A}}$ und erhalten so aus (2.29)

$$\begin{aligned} -1 &= \frac{z z^*}{2} \langle b k \rangle [k b] = -\frac{z}{\sqrt{2}} \langle k b \rangle \left(\frac{z}{\sqrt{2}} \langle k b \rangle \right)^* = -\left| \frac{z \langle \lambda_{(k)} b \rangle}{\sqrt{2}} \right|^2 \\ \implies z \langle k b \rangle &= \sqrt{2} e^{i\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad b_B = q_B \frac{\sqrt{2} e^{i\alpha}}{z \langle k q \rangle} . \end{aligned} \quad (2.33)$$

Unser vorläufiges Ergebnis lautet damit

$$h_{+\dot{A}B} = \sqrt{2} e^{i\alpha} \frac{k_{\dot{A}} q_B}{\langle k q \rangle} , \quad (2.34)$$

worin q_B bis auf $q_B = k_B$ frei wählbar ist und deshalb *Eichspinor* genannt wird. Wir können diesen Umstand nutzen, um den Phasenfaktor zu eliminieren, in dem wir (2.29) verschärfen zu

$$\left(h_{+}(q_1), h_{-}(q_2) \right) = -1 . \quad (2.35)$$

Der große Vorteil obiger Bedingung besteht darin, dass wir nun für jeden eichinvarianten Beitrag zur Übergangsamplitude eine geeignete Eichung wählen können, ohne auf eventuelle Phasendifferenzen bei der Quadrierung der Amplitude achten zu müssen.

Abschließend erhalten wir also für masselose Spin-1-Partikel die Zerlegung

$$A_{\dot{A}B} = \alpha_+ h_{+\dot{A}B} + \alpha_- h_{-\dot{A}B} \quad (2.36)$$

mit

$$h_{+\dot{A}B} = \sqrt{2} \frac{\tilde{k}_{\dot{A}} q_B}{\langle k q \rangle} \quad \text{und} \quad h_{-\dot{A}B} = \sqrt{2} \frac{\tilde{q}_{\dot{A}} k_B}{[k q]} . \quad (2.37)$$

2.5. Zusammenfassung

Ausgehend von der Impulsraumdarstellung ermöglicht der Weyl-V.d.W Formalismus eine einheitliche Beschreibung von Objekten mit unterschiedlichem Spin in Termen von zweidimensionalen Spinoren. Im masselosen Fall sind die erhaltenen Ausdrücke dabei besonders einfach. Bei einer Verallgemeinerung auf massive Objekte sind die Rechnungen etwas umfangreicher, das Vorgehen ist jedoch identisch zu dem hier Beschriebenen. Eine hervorragende Quelle zu diesem Thema ist unter anderem {21}.

Für den vorgestellten masselosen Fall haben wir zu dem einige nützliche Relationen aufgezeigt, die diesem Kalkül gegenüber den Standardmethoden einen deutlichen Vorteil verschaffen. Welche genauen Konsequenzen die Implementierung dieser Technik in den Feynmanregeln hat, wollen wir im nächste Kapitel studieren.

3 | Das Amplitudenkalkül für Gluonbaumgraphen

Nimmt man die Resultate der beiden bisherigen Kapitel zusammen, so profitieren Gluonbaumgraphen am meisten von den erreichten Verbesserungen. Insbesondere der in den Eichspinoren liegende Freiheitsgrad verspricht eine enorme Vereinfachung der Rechnungen. Allerdings benötigen wir zuvor genauere Kenntnisse über den Aufbau der zu den Amplituden zugehörigen analytischen Ausdrücke. Auch wenn wir mit diesem Wissen schließlich einige beachtliche Resultate erreichen, werden wir trotzdem auf das äußerst überraschende Ergebnis von S.J. Parke und T.R. Taylor angewiesen sein. Erst dieses versetzt uns in die Lage Gluonbaumgraphen unabhängig von den Feynmanregeln zu berechnen.

3.1. Konstruktive Analyse von Graphen

Wählt man einen konstruktiven, graphischen Zugang zur Beschreibung von Gluonprozessen auf Baumgraphenniveau, findet man, per Induktion, schnell die nachfolgenden wichtigen Resultate {20}.

- i) Ein vollständig aus kubischen Gluonvertices konstruierter Baumgraph besitzt $n + 2$ äußere Gluonen bei n kubischen Vertices.
- ii) Ein n Gluonen Baumgraph diesen Typs ist ein Produkt aus n Helizitätsvektoren sowie dem Quotienten von maximal $(n - 2)$ Impulsvektoren und $(n - 3)$ Propagatoren (nur gültig bei Verwendung der Feynman Eichung).

Beide Aussagen sind sofort einsichtig, wenn man beachtet, dass durch „anmultiplizieren“ jedes weiteren kubischen Vertices je ein Propagator plus ein zusätzliches externes Gluon produziert wird.

- iii) Die Struktur von Diagrammen mit einem zusätzlichen quartischen Vertex (beliebige Position im Diagramm) lässt sich leicht aus dem vorherigen Absatz gewinnen. Hierbei nutzen wir den topologischen Aspekt, dass bei vorgegebener Vertextzahl die Anzahl aller Linien unabhängig vom Aufbau ist. Gegenüber i) erweitert sich unser Graph also um einen Propagator und 2 externe Gluonen (3 freie am quartischen Vertex - 1 durch Propagatorbildung am bisherigen Diagramm) sprich zwei Helizitätsvektoren.

Betrachten wir nun eine solche Struktur mit n äußeren Gluonen. Ohne den quartischen Vertex hätten wir $(n - 2)$ externe Gluonen, weshalb es insgesamt $(n - 2) - 3 + 1 = (n - 4)$ Propagatoren gibt. Genauso groß ist auch die maximale Impulspotenz, da nur die kubischen Vertices jeweils einen Impulsbeitrag liefern. Entsprechend i) benötigt man aber für $(n - 2)$ externe Gluonen $(n - 2) - 2 = (n - 4)$ kubische Vertices, woraus die Aussage folgt.

- iv) Mittels Induktion folgert man hieraus: Ein n Gluonbaumgraphen mit m quartischen Vertices verfügt über $(n - 3) - m$ Propagatoren und maximal $(n - 2) - 2m$ Impulsfaktoren.

Wir formulieren die Essenzen dieser Beobachtungen in der folgenden

Konsequenz 3.1. *Bezeichne n_h die Anzahl der Helizitätsvektoren, n_I die Anzahl der Impulsfaktoren im Zähler und n_P die Anzahl der Propagatoren im Nenner, so gilt auf Baumgraphenniveau:*

1. $n_I < n_h$
 \Rightarrow *In allen auftretenden Termen existieren Skalarprodukte von Helizitätsvektoren!*
2. $n_I \leq n_P + 1$

Für alle weiteren Diskussionen im Dokument wollen wir zu dem die

Konvention 2. *Alle externen Gluonen werden als einlaufende Teilchen betrachtet.*

vereinbaren. Bei Übertragung auf reale Prozesse mit auslaufenden Teilchen sind also die Helizitäten dieser Partikel entsprechend zu invertieren.

3.2. Helizitätsamplituden

Als erste einfache, zugleich aber weitreichende Beobachtung folgt aus (2.27) die

Konsequenz 3.2. *Eine Invertierung der Helizitäten, aller am Prozess beteiligten Gluonen, ist wegen der Reellwertigkeit der Impulse äquivalent zur komplexen Konjugation der Baumgraphen Gluonamplitude.*

Insbesondere beschreibt

$$A_n^{q-} = (A_n^{(n-q)-})^* \quad (3.1)$$

die Wirkung der Paritätstransformation und der Bezeichnung A_n^{q-} liegt die

Definition 3.1.

$$A_n^{q-} = n\text{-Gluonen Partialamplitude mit } q \text{ frei wählbaren Gluonen} \\ \text{negativer Helizität} \quad (3.2)$$

gemäß Abschnitt 1.3 zugrunde.

Wir wollen nun, wie angekündigt, Nutzen aus der nach Abschnitt 2.4 verbliebenen Eichfreiheit ziehen. Dies können wir aber nur aufgrund der

Feststellung 3.1. *Die Übergangsamplituden der Yang-Mills-Theorie sind eichinvariant.*

(Der Beweis hierzu ist in den gängigen Lehrbüchern der QFT zu finden.)

Da nach 3.1 in allen Termen Skalarprodukte der Helizitätsvektoren untereinander existieren, führt die naive Wahl

$$q_B^i = \begin{cases} \kappa_B & h_i = h_+ \\ \rho_B & h_i = h_- \end{cases} \quad (2.37) \quad \Rightarrow \quad h_{+\dot{A}B} = \frac{\tilde{k}_{(i)\dot{A}} \kappa_B}{\langle k_{(i)} \kappa \rangle} \quad \wedge \quad h_{-\dot{A}B} = \frac{\tilde{\rho}_{\dot{A}} k_{(i)B}}{[k_{(i)} \rho]}, \quad (3.3)$$

d.h. *gleiche Eichung bei gleicher Helizität*, sofort auf

$$A_n^{(0)} = A_n^{n-} = 0. \quad (3.4)$$

3. Das Amplitudenkalkül für Gluonbaumgraphen

Sei daher o.B.d.A. in A_n^{q-} $h_1 = h_-$, $h_2 = h_+$. Wir wählen dann speziell

$$q_B^i = \begin{cases} \kappa_B = k_{(1)B} & h_i = h_+ \\ \rho_B = k_{(2)B} & h_i = h_- \end{cases}, \quad (3.5)$$

so dass die Anzahl nicht verschwindender Skalarprodukte von Helizitätsvektoren gleich $(n - q - 1)(q - 1)$ ist. Diese Wahl trägt den Namen *minimale Eichung*. In der minimalen Eichung gilt offensichtlich

$$A_n^{1-} = A_n^{(n-1)-} = 0. \quad (3.6)$$

Insgesamt erhalten wir die

Konsequenz 3.3. *Amplituden bei denen weniger als 2 Gluonen eine vom Rest verschiedene Helizität aufweisen, verschwinden.*

Die ersten nicht verschwindenden Partialamplituden sind daher von der Art

$$\begin{aligned} A_n^{2-} &= A_n^{tree}(1^+, \dots, j^-, \dots, k^-, \dots, n^+) \\ &= A_{MHV} \end{aligned} \quad (3.7)$$

und heißen in Anlehnung an obige Erkenntnis Maximal Helicity Violating Amplituden. Überraschenderweise existiert für *MHV*-Amplituden ein geschlossener Ausdruck, welcher mit $\lambda_{(i)} = i$ durch

$$\begin{aligned} A_{MHV} &= \frac{\langle jk \rangle^4}{\prod_{i=1}^n \langle i(i+1) \rangle} \quad \text{mit } n+1 \equiv 1 \\ &= \frac{\langle jk \rangle^4}{\langle 12 \rangle \dots \langle n1 \rangle} \end{aligned} \quad (3.8)$$

gegeben ist. Die Formel wurde, wie in der Einleitung bereits erwähnt, 1986 von *S.R. Parke* und *T.R. Taylor* {2} gefunden. Bereits kurze Zeit später wurde ein konstruktiver Beweis durch *Berends* und *Giele* {3} angegeben, in dem ein von ihnen entwickelte Rekursionstechnik zur Anwendung kam. Dank der einfachen Erkenntnis (3.1) bekommen wir zu dem sofort den Ausdruck für $A_n^{(n-2)-}$:

$$A_n^{(n-2)-} = A_{MHV} = \frac{[jk]^4}{[12] \dots [n1]}. \quad (3.9)$$

Aufgrund ihrer engen Anlehnung an Feynman Graphen wollen wir uns nicht näher mit der Technik von Berends und Giele beschäftigen.

Ich fasse daher die Erkenntnisse ihrer Rechnung in der

Feststellung 3.2. Für Amplituden vom Typ A_n^{2-} sowie $A_n^{(n-2)-}$ existiert eine kompakte Lösung. Zu dieser tragen nur solche Graphen bei die vollständig aus kubischen Vertices aufgebaut sind.

zusammen.

Das bemerkenswerte an den gefundenen Resultaten ist, dass sie unabhängig von der Anzahl der Gluonen sind. Diese universale Struktur gibt Anstoß zu der Frage, ob hier nicht eine tieferliegende Struktur vorhanden ist, die wir nutzen können um Amplituden einfacher zu berechnen.

3.3. Der CSW Zugang zur Berechnung von Übergangsamplituden

In seinem wegweisendem Artikel zeigte E. Witten {6} auf, dass bei Benutzung der Twistorthorie *MHV*-Amplituden tatsächlich eine fundamentale Bedeutung zukommt. Daher formulierten F. Cachazo, P. Svrcek und E. Witten einen Mechanismus {7}, der *MHV Amplituden als Vertices* zur Berechnung von Amplituden vorsieht. Eine revolutionäre Idee, deren unmittelbare Konsequenz eine *grundlegende Restrukturierung der störungstheoretischen Behandlung* ist. Insbesondere folgt mit dem Ergebnis von Berends und Giele oben sofort die

Konsequenz 3.4. Die Restrukturierung des Kalküls durch den CSW Zugang bewirkt effektiv eine Beschreibung der Gluonamplituden auf Baumgraphenniveau allein durch kubische Vertices.

Damit eine solch starke Aussage glaubwürdig wird, ist es natürlich notwendig zu zeigen, dass der CSW Zugang die selben Ergebnisse produziert wie die Standardmethode. Wir wollen uns deshalb kurz mit der Umsetzung der Idee von Cachazo, Svrcek, Witten und den damit verbundenen Problemen auseinandersetzen:

- i) Um *MHV*-Amplituden in Vertices zu konvertieren, benötigt man, wegen der inneren Linien, eine „off-shell“ Fortsetzung.
- ii) Hieraus erwächst instantan die Notwendigkeit zu zeigen, dass das Ergebnis der Rechnung unabhängig von der gewählten Fortsetzung ist.
- iii) Ferner ist zu zeigen, dass die Konstruktion lorentzinvariant ist.
- iv) Die einfachsten *MHV* (\overline{MHV}) Vertices, $A_3^{1-} = A(+, +, -)$ und $A_3^{2-} = A(-, -, +)$, welche mit dem ursprünglichem kubischen Vertex übereinstimmen, sind 0 !

3. Das Amplitudenkalkül für Gluonbaumgraphen

Dieses Ergebnis folgt, unabhängig von der gewählten Eichung der Helizitätsvektoren, aus kinematischen Gründen. Wegen der Impulserhaltung am Gluonenvertex gilt nämlich im Zusammenhang mit der Massebilanz

$$0 = p_i^2 = (p_j + p_l)^2 = 2 p_i p_j = \langle i j \rangle [i j] \stackrel{(2.5)}{=} \langle i j \rangle \langle i j \rangle^* \quad (3.10)$$

für $i, j, l \in (+, +, -)$ zyklisch. Da p_k reell ($\tilde{\lambda}_k = \lambda_k^*$), folgt also

$$\lambda_{(i)} \propto \lambda_{(j)} \propto \lambda_{(k)} \propto \tilde{\lambda}_{(i)} \propto \tilde{\lambda}_{(j)} \propto \tilde{\lambda}_{(k)}. \quad (3.11)$$

Wie man sich leicht überlegt, gilt diese Relation selbst dann noch, wenn eines der „Beine“ eine innere (off-shell) Linie repräsentiert. Das steht aber in klarem Widerspruch zur Zerlegung von A_4^q . Einen Ausweg aus diesem Dilemma bietet der Übergang zu komplexen kinematischen Variablen, eine Technik auf die man auch bei Verwendung von Feynmangraphen zurückgreifen muss. Damit lassen sich sowohl Massebilanz und Impulserhaltung am Vertex als manifeste Eigenschaften der Theorie aufrecht erhalten, wie auch die bekannte geschlossene Form für MHV (\overline{MHV}) Amplituden.

Durch diesen Schritt wird die Korrelation $\lambda_i^* = \tilde{\lambda}_i$ aufgehoben, so dass Gleichung (2.5) keine Anwendung mehr findet. D.h. man wählt entsprechend die Spinoren zur Erfüllung von Energie- und Impulsbilanz aus, die nicht in der Parke-Taylor Formel auftauchen.

Gehen wir gedanklich davon aus, wir hätten alle Punkte erfüllt, so verbleibt nun noch der Beweis der Äquivalenz. Da wir in beiden Zugängen eine analytische Fortsetzung durchgeführt haben, ist es nur logisch Methoden der Funktionentheorie zu bemühen. Als äußerst hilfreich erweist sich hierbei die

Feststellung 3.3. *Aufgrund der Gesamtimpulserhaltung sowie den lokalen Impulserhaltungen an den Vertices besitzen Übergangsamplituden auf Baumgraphenniveau nur Pole durch Propagatoren, die die Massenbilanz von Gluonen erfüllen.*

Aus physikalischer Sicht schließt sich dem unmittelbar die

Konsequenz 3.5. *Die analytisch fortgesetzten Amplituden besitzen eine Laurentreihenentwicklung!*

an. Es verbleibt damit als Aufgabe, die Gleichheit der Pole zu zeigen. Das hierzu notwendige Residuenkalkül aus der Funktionentheorie gestattet uns aber nicht nur die Klassifizierung der Pole, sondern auch ihre Berechnung.

Warum nutzen wir also diese Methode nicht direkt, um die Amplituden selbst zu berechnen?

3.4. Die BCFW Rekursion

Erneut war es E. Witten der diesen Gedanken aufgriff und zeigte {24}, dass eine von R. Britto, F. Cachazo und B. Feng gefundene Rekursionsformel {8} genau das tat.

Ausgehend von der analytisch fortgesetzten Partialamplitude A_n werden 2 beliebige Gluonen, o.B.d.A. r und s , herausgegriffen. Man führt dann eine „on shell“ Fortsetzung ihrer komplexen Impulse durch die Vorschrift

$$\begin{aligned} P_r &\mapsto \widehat{P}_r(z) = P_r - z\lambda_r \widetilde{\lambda}_s = \lambda_r(\widetilde{\lambda}_r - z\widetilde{\lambda}_s) \\ P_s &\mapsto \widehat{P}_s(z) = P_s + z\lambda_r \widetilde{\lambda}_s = (\lambda_s + z\lambda_r)\widetilde{\lambda}_s \end{aligned} \quad (z \in \mathbb{C}) \quad (3.12)$$

ein. Die Eigenschaften dieser Manipulation sind leicht einzusehen. So gilt:

$$\begin{aligned} \widehat{P}_r(z)^2 &= \langle \lambda_r \lambda_r \rangle \lambda_r - z\lambda_s = 0, \\ \widehat{P}_s(z)^2 &= \langle (\lambda_s + z\lambda_r)(\lambda_s + z\lambda_r) \rangle [\lambda_s \lambda_s] = 0, \end{aligned} \quad (3.13)$$

wie zu erwarten war und ferner

$$\widehat{P}_r(z) + \widehat{P}_s(z) = P_r + P_s \quad \Rightarrow \quad \sum_{i \neq r, s} P_i + \widehat{P}_r(z) + \widehat{P}_s(z) = \sum_{i=1}^n P_i = 0, \quad (3.14)$$

um der Gesamtimpulserhaltung gerecht zu werden. Tatsächlich ist das der entscheidende Punkt, möchte man diese Idee auf mehr als 2 Spinoren ausweiten. Die Eigenschaft mit dem Shift auf der „Massenschale“ zu sitzen, folgt von selbst aus dem Spinorkalkül von Kapitel 2. Konzentrieren wir uns hier aber auf den (optimalen) Fall von zwei Gluonen, so lautet das Ergebnis:

$$A_n^{q-} = \sum_{\substack{i \leq r \\ j \geq r}} \sum_h A(i, \dots, r, \dots, j, -\widehat{P}_{i,j}^{(h)}) \frac{1}{p_{i,j}^2} A(+\widehat{P}_{i,j}^{(-h)}, j+1, \dots, s, \dots, i-1). \quad (3.15)$$

Hierbei wurden, zur Wahrung der Übersichtlichkeit, die momentan nicht essentiellen Helizitätsindizes unterdrückt. Ferner kommt den einzelnen Impulstermen die Bedeutung

$$P_{i,j} = P_{i, \dot{A}B} + \dots + P_{r, \dot{A}B} + \dots + P_{j, \dot{A}B} \quad (3.16)$$

$$p_{i,j}^2 = (p_i + \dots + p_r + \dots + p_j)_\mu (p_i + \dots + p_r + \dots + p_j)^\mu \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \widehat{P}_{ij} &= P_{i, \dot{A}B} + \dots + (P_r(z_{ij}))_{\dot{A}B} + \dots + P_{j, \dot{A}B} \\ &= P_{i,j} - \frac{p_{i,j}^2}{P_{i,j} \lambda_r \widetilde{\lambda}_s} \lambda_r \widetilde{\lambda}_s =: P_{i,j} + \frac{p_{i,j}^2}{\langle \lambda_r | P_{i,j} | \lambda_s \rangle} \lambda_r \widetilde{\lambda}_s \end{aligned} \quad (3.18)$$

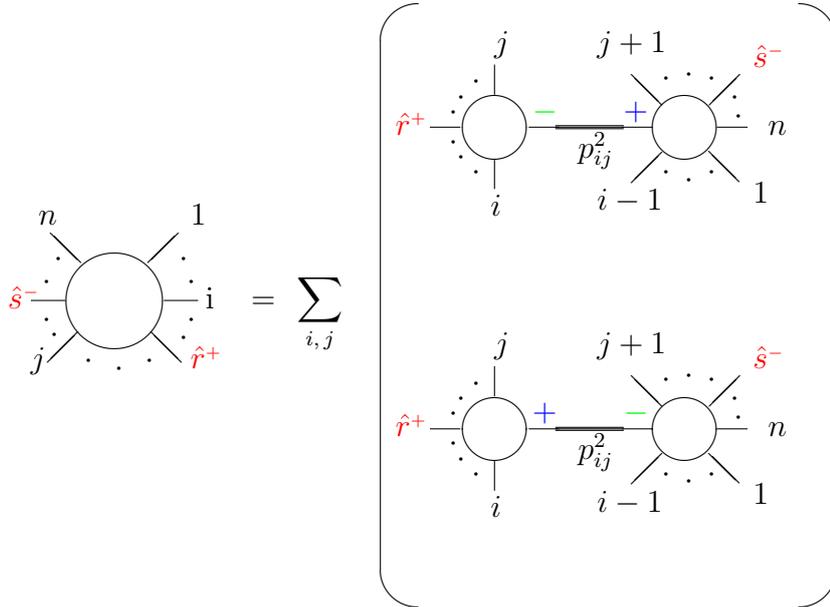


Abbildung 3.1.: schematische Darstellung der Rekursionsformel

zu.

Grundlage der Umformung in der letzten Zeile ist (2.6), wonach die Vertauschung zweier Spinorindices im Produkt ein Vorzeichenwechsel verlangt. Im Vergleich zur Literatur, bemüht sich der Text zudem die missverständliche Identifizierung $p_{i,j}^2 = P_{i,j}^2$ zu vermeiden.

Wie man leicht verifiziert gilt insbesondere $\widehat{P}_{i,j}^2 = 0$, so dass die Teilamplituden physikalische Amplituden sind. Es ist daher ohne weiteres möglich Gleichung (3.15) erneut anzuwenden. Eine graphische Version der Rekursionsformel gibt Abbildung 3.1 wieder.

3.4.1. Eine einfache Ableitung der BCFW Rekursionsformel

Aufgrund des eingeführten Hilfsparameters z ist

$$A\left(1^{h_1}, \dots, r^{h_r}, \dots, s^{h_s}, \dots, n^{h_n}\right) = A(z) \quad (3.19)$$

eine Funktion in einer komplexen Variablen die an der Stelle $z = 0$ der physikalischen Übergangsamplitude entspricht. Da wir mit dem Weyl-v.-d.-Waerden-Formalismus alle Terme in Spinorprodukte überführt haben, können wir sogar genauer sagen, dass $A(z)$ gebrochen rational in z ist. Unsere Aufgabe besteht also darin, die Laurentreihe von $A(z)$ zu finden und anschließend bei $z = 0$ auszuwerten.

Für die weitere Diskussion spezifizieren wir (3.12) zu:

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}_{h_-} &\mapsto \tilde{\lambda}_{h_-} - z\tilde{\lambda}_{h_+}, \\ \lambda_{h_+} &\mapsto \lambda_{h_+} + z\lambda_{h_-}.\end{aligned}\tag{3.20}$$

Diese Wahl bringt keine praktische Einschränkung mit sich, denn wir wissen ja schon, dass Amplituden, bei denen alle Gluonen gleiche Helizität haben, verschwinden. Natürlich lässt sich die Ableitung auch allgemeiner durchführen {24}, mit entsprechend verallgemeinertem Ergebnis.

Beginnen wir also mit der Untersuchung des Hauptteils der Laurentreihe. Aufgrund der Eichinvarianz der Amplituden können wir dabei sofort die Helizitätsvektoren als mögliche Quelle ausschließen. Somit verbleiben als Kandidaten für Pole nur noch die Propagatoren. Hier ist es wichtig, sich an die Aussage von Abschnitt 1.3 zu erinnern. Demnach können Propagatoren nur aus Impulsen zyklisch benachbarter Gluonen zusammengesetzt sein. Eine z -Abhängigkeit besteht nach (3.14) jedoch nur dann, wenn entweder r oder s zur Indexmenge des Propagators gehört. Wegen der Gesamtimpulserhaltung genügt es dabei, sich o.B.d.A. auf den Fall $r \in i, \dots, j$ zu beschränken. Mit (3.12) folgt für einen solchen Fall

$$\begin{aligned}p_{i,j}^{-2} &\mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} P_{i,j}^{-2}(z) = 2(P_{i,\dot{A}B} + \dots + P_{r,\dot{A}B} + \dots + P_{j,\dot{A}B})^{-2} \\ &= 2(P_{i,j}^2 - 2zP_{i,j}\lambda_r\tilde{\lambda}_s)^{-1} \\ &\stackrel{(2.14)}{=} (p_{i,j}^2 + z\langle\lambda_r|P_{i,j}|\tilde{\lambda}_s\rangle)^{-1}.\end{aligned}\tag{3.21}$$

Damit sind Propagatoren linear in z . Weil außerdem jeder Propagator nur einmal im Diagramm auftritt, können wir aus der Rechnung folgern:

Konsequenz 3.6. $A(z)$ hat nur Pole erster Ordnung.

Der Hauptteil ist deshalb durch

$$A(z) = \sum_{ij} \frac{a_{i,j}}{z - z_{ij}} \quad \text{mit} \quad z_{ij} = -\frac{p_{ij}^2}{\langle\lambda_r|P_{ij}|\tilde{\lambda}_s\rangle}\tag{3.22}$$

gegeben.

Wenden wir uns nun dem Nebenteil von $A(z)$ zu und betrachten das Verhalten für $z \mapsto \infty$. Wir benötigen dazu die z -Abhängigkeit aller Faktoren. Bei den Helizitätsvektoren machen wir keinen Fehler, wenn wir aus

$$h_{r,\dot{A}B} = h_- = \frac{\tilde{q}_A \lambda_{rB}}{[\lambda_r(z) q]} \quad h_{s,\dot{A}B} = h_+ = \frac{\tilde{\lambda}_{s\dot{A}} q_B}{\langle\lambda_s(z) q\rangle}\tag{3.23}$$

3. Das Amplitudenkalkül für Gluonbaumgraphen

den Faktor z^{-2} benutzen. (Die Eichinvarianz der Übergangsmplituden sichert uns, dass wir letztlich immer den gleichen Exponenten, wie den nachfolgend berechneten, erhalten.) Alle anderen Helizitätsvektoren sind unabhängig. Für den Quotienten aus Impulsen und Propagatoren betrachten wir das Szenario maximaler z -Abhängigkeit, in dem die beiden Gluonen auf entgegengesetzter Seite des Diagramms stehen, so dass z durch das gesamte Diagramm „fließt“. Aus unserer Analyse in 3.1 folgt dann mit (3.12), (3.21)

$$A(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^2} \frac{z^{(n-2)-2m}}{z^{(n-3)-m}} = \frac{1}{z^{(1+m)}}. \quad (3.24)$$

Daraus folgt unmittelbar

Konsequenz 3.7. 1. $A(z)$ besitzt keinen Nebenteil.
 2. Das Verhalten von $A(z)$ wird für große Werte von $|z|$ allein durch Diagramme, welche vollständig aus kubischen Vertices zusammengesetzt sind, bestimmt.

Als Zwischenergebnis für die Übergangsamplitude $A(z=0)$ erhalten wir also

$$A(0) = - \sum_{i,j} \frac{a_{i,j}}{z_{ij}}. \quad (3.25)$$

Es verbleibt jetzt noch die Ermittlung der Koeffizienten a_{ij} , welche gerade die Residuen der Funktion darstellen. Wie üblich heben wir dazu die Singularitäten und werten deshalb die Funktion $g(z) = (z - z_{i,j})A(z)$ an den Stellen $z = z_{ij}$ aus. Durch die bisherige Diskussion können wir bereits sagen:

- i) Ursache des zu $a_{i,j}$ zugehörigen Pols ist der Propagator $P_{i,j}(z)$.
- ii) Der Propagator $P_{i,j}(z)$ zerlegt das Diagramm in 2 Hälften, wobei sich in einer die zyklisch geordneten Gluonen i bis j (inklusive Gluon r) befinden.

Demzufolge muss $A(z)$ von der Gestalt

$$\begin{aligned} A(z) &= \sum_{i,j} \sum_h A_{ij}^h(z) \frac{1}{P_{i,j}^2} A_{j+1,i-1}^{-h}(z) \\ &\stackrel{(3.21)}{=} - \sum_{i,j} \frac{z_{i,j}}{(z - z_{i,j}) P_{i,j}^2} \sum_h A_{ij}^h(z) A_{j+1,i-1}^{-h}(z) \end{aligned} \quad (3.26)$$

sein, wobei die Terme

$$\begin{aligned} A_{ij}^h(z) &:= A\left(i, \dots, r(z), \dots, j, -P_{i,j}^{(h)}(z)\right) \quad \text{und} \\ A_{j+1, i-1}^{-h}(z) &:= A\left(P_{i,j}^{(-h)}(z), j+1, \dots, s(z), \dots, i-1\right) \end{aligned} \quad (3.27)$$

bedeuten. Wir finden somit a_{ij} zu

$$a_{ij} = -\frac{z_{ij}}{p_{i,j}^2} \sum_h A_{ij}^h(z) A_{j+1, i-1}^{-h}(z), \quad (3.28)$$

woraus mit (3.25) schließlich die BCFW Rekursionsformel (3.15) folgt.

Bemerkung. Aus der Definitionsgleichung des Residuums folgt

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B} A(z) = \sum_{z_{ij} \in B} \text{Res}_{z_{ij}} A, \quad (3.29)$$

was in Zusammenhang mit Konsequenz 3.7 sofort Konsequenz 3.4 reproduziert.

3.4.2. Hinweise zum Einsatz der Rekursionsformel in der Praxis

Vereinfachung der Rekursionssumme

Die Rekursionsformel in ihrer allgemeinen Form ist sehr unübersichtlich, was die Zahl der Summanden betrifft. Dem kann jedoch schnell abgeholfen werden, indem man für die zu manipulierenden Gluonen ein benachbartes Paar wählt. Dadurch wird nämlich eine der Summen in (3.15) eliminiert. Wegen der zyklischen Invarianz ist es üblich für die beiden Gluonen einfach das Erste und N-te zu wählen. In der folgenden Rechnung verzichten wir aber noch auf diesen Schritt.

3. Das Amplitudenkalkül für Gluonbaumgraphen

Sei o.B.d.A. $(h_{r-1}, h_r) = (+, -)$ dann ist:

$$A_n^{q-} = \sum_{i=r+1}^{r-3} \sum_h A(\hat{r}^-, \dots, i, -\hat{P}_{r,i}^{(h)}) \frac{1}{p_{r,i}^2} A(+\hat{P}_{r,i}^{(-h)}, i+1, \dots, \widehat{r-1}^+) \quad (3.30)$$

mit

$$\hat{P}_r = \lambda_r \left(\tilde{\lambda}_r + \frac{p_{r,i}^2}{\langle \lambda_r | P_{r,i} | \tilde{\lambda}_{r-1} \rangle} \tilde{\lambda}_{r-1} \right), \quad (3.31)$$

$$\hat{P}_{r-1} = \left(\lambda_{r-1} - \frac{p_{r,i}^2}{\langle \lambda_r | P_{r,i} | \tilde{\lambda}_{r-1} \rangle} \lambda_r \right) \tilde{\lambda}_{r-1}, \quad (3.32)$$

$$\hat{P}_{r,i} = P_{r,i} + \frac{p_{r,i}^2}{\langle \lambda_r | P_{r,i} | \lambda_{r-1} \rangle} \lambda_r \tilde{\lambda}_{r-1}, \quad (3.33)$$

Identitäten für interne Impulse

Will man nun eine Amplitude wie A_4^{2-} berechnen, so wird schnell klar, dass noch einige Rechenregeln zum Umgang mit $\hat{P}_{r,i}$ nötig sind. Dazu bemerken wir einerseits, dass aus (3.33) die Identitäten

$$\langle \lambda_r | \hat{P}_{r,i} | \lambda_a \rangle = \langle \lambda_r | P_{r,i} | \lambda_a \rangle, \quad (3.34)$$

$$\langle \lambda_b | \hat{P}_{r,i} | \lambda_{r-1} \rangle = \langle \lambda_b | P_{r,i} | \lambda_{r-1} \rangle \quad (3.35)$$

für beliebige $a, b \in (1, \dots, n)$ erwachsen. Andererseits existiert wegen $\hat{P}_{r,i}^2 = 0$ formal eine Spinorzerlegung

$$\hat{P}_{r,i} = \lambda_{\hat{P}_{r,i}} \tilde{\lambda}_{\hat{P}_{r,i}} \quad (3.36)$$

im Sinne von (2.15). Insgesamt erhalten wir daher

$$\langle \lambda_r \lambda_{\hat{P}_{r,i}} \rangle [\lambda_{\hat{P}_{r,i}} \lambda_a] =: \langle r \hat{P}_{r,i} \rangle [\hat{P}_{r,i} a] = \langle r | P_{r,i} | a \rangle, \quad (3.37)$$

$$\langle \lambda_b \lambda_{\hat{P}_{r,i}} \rangle [\lambda_{\hat{P}_{r,i}} (r-1)] =: \langle b \hat{P}_{r,i} \rangle [\hat{P}_{r,i} (r-1)] = \langle b | P_{ri} | (r-1) \rangle, \quad (3.38)$$

was äquivalent ist zu

$$[\hat{P}_{r,i} a] = \langle r | P_{r,i} | a \rangle \times \langle r \hat{P}_{r,i} \rangle^{-1}, \quad (3.39)$$

$$\langle b \hat{P}_{r,i} \rangle = \langle b | P_{r,i} | (r-1) \rangle \times [\hat{P}_{r,i} (r-1)]^{-1}. \quad (3.40)$$

Konventionen bei Phasenfaktoren

Wie vielleicht schon bei der Ableitung der Rekursionsformel aufgefallen ist, unterdrücken wir hier den mit dem Gluonpropagator auftretenden Faktor der $-i$, d.h. wir haben die

Konvention 3. $Propagator = i \cdot Propagator_{QCD}$.

Auch dieser Schritt erfolgt nur, um unserer Notation konform bezüglich der uns interessierenden Literatur zu halten. Gemäss der Berechnung der Dreipunktsfunktion (s. nächster Abschnitt) mit den in Abbildung 1.1 vorgestellten Vertices müsste diese nämlich einen Faktor i enthalten. Ähnlich verhält es sich bei der Handhabung negativer Impulse. Gemäss der Formel für die Komponentenschreibweise (2.16 AUF SEITE 14) gilt nämlich:

$$\lambda_{-P} = i\lambda_P$$

und analog für kontravariante Spinoren. Weil die einzigen nicht verschwindenden Amplituden aber vom Typ MHV bzw. \overline{MHV} sind, ergibt sich analytisch effektiv ein Faktor (-1) aus den negativen Impulsen. Ein weiterer Faktor (-1) käme zu dem vom Produkt der beiden Amplituden, weshalb insgesamt nur der Phasenfaktor i vom Propagator verbleibt. Zusammen mit der bereits getroffenen Entscheidung hinsichtlich der Spinormetrik für die kontravarianten Spinoren verzichten wir daher auf alle Faktoren von i , d.h. wir benutzen die

Konvention 4. $\lambda_{-P} = \lambda_P$.

Davon ausgehend, werden wir abschließend mittels der Rekursionsformel die Parke-Taylor Formel induktiv beweisen und somit gleichzeitig eine der letzten Lücken in der theoretischen Abhandlung schließen.

3.4.3. Beweis der Parke-Taylor Formel

Betrachten wir also Amplituden vom Typ A_n^{2-} (mit komplexifizierten Impulsen). Wir berechnen zunächst explizit den kubischen Gluonenvertex als Unter Benutzung von gleicher Helizitätseichung¹ mit $q_1 = q_2 = q$ und $q_3 = k_1$ folgt:

$$A_n^{2-} = \sqrt{2}i \cdot (h_2^- h_3^+) (h_1^- k_2) \quad (3.41)$$

$$= -i \frac{\langle 12 \rangle^2 \langle 23 \rangle [3q]}{\langle 31 \rangle \langle 23 \rangle [1q]} \quad (3.42)$$

¹Die Anwendung minimaler Eichung liefert wegen der Verwendung komplexer Impulse keine Verbesserung.

$$A_n^{2-} \stackrel{-k_3=k_2+k_1}{=} i \frac{\langle 12 \rangle^2 [1q] \langle 12 \rangle}{\langle 31 \rangle [1q] \langle 23 \rangle} \quad (3.43)$$

$$= -i \frac{\langle 12 \rangle^3}{\langle 23 \rangle \langle 31 \rangle}. \quad (3.44)$$

Offensichtlich stimmt trotz aller Sorgfalt der Phasenfaktor der Rechnung nicht mit der Parke-Taylor Formel überein. Eine kurze Analyse zeigt, dass dies auf die Wahl der Normierungsfaktoren der Helizitätsspinoren und damit die Spinormetrik sowie den Phase des Gluonvertices zurück zuführen ist. In den folgenden Rechnungen geht die explizite Gestalt der Helizitätsspinoren aber nicht mehr ein, da uns die Dreipunktsfunktionen als Basisbausteine dienen. Hieraus ergibt sich für uns die Gelegenheit das Problem durch die

Konvention 5. $V_{ggg} = i \cdot V_{ggg_{QCD}}$

zu beheben. Es folgt deshalb für den

Induktionsanker:

$$A_n^{2-} = \frac{\langle 12 \rangle^4}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 31 \rangle}. \quad (3.45)$$

Entsprechend ist die Parke-Taylor Formel (3.8) unsere

Induktionsbehauptung:

$$A_n^{2-} = \frac{\langle jk \rangle^4}{\langle 12 \rangle \dots \langle n1 \rangle}. \quad (3.46)$$

Hierbei bezeichnen j und k die betreffenden Gluonen negativer Helizität.

Trivialerweise folgt daraus für den

Induktionsschritt:

$$A_{n+1}^{2-} = \frac{\langle jk \rangle^4}{\langle 12 \rangle \dots \langle n(n+1) \rangle, \langle (n+1)1 \rangle} \quad (3.47)$$

zu dessen Beweis wir die Rekursionsformel in der Gestalt (3.30) mit $r \mapsto j$ nutzen.

Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned}
 A_{n+1}^{2-} &= \sum_{i=j+1}^{j-3} \sum_h A(\hat{j}^-, \dots, i, -\widehat{P}_{j,i}^{(h)}) \frac{1}{p_{j,i}^2} A(+\widehat{P}_{j,i}^{(-h)}, i+1, \dots, \widehat{j-1}^+) \\
 &\stackrel{(3.2)}{=} A(\hat{j}^-, (j+1)^+, -\widehat{P}_{j,(j+1)}^+) \frac{1}{p_{j,(j+1)}^2} A(\widehat{P}_{j,(j+1)}^-, (j+2)^+, \dots, k^-, \dots, \widehat{(j-1)}^+) \\
 &+ A(\widehat{P}_{j,(j-3)}^-, (j-2)^+, \widehat{(j-1)}^+) \frac{1}{p_{j,(j-3)}^2} A(\hat{j}^-, \dots, k^-, \dots, (j-3)^+, -\widehat{P}_{j,(j-3)}^+)
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

Wie man sieht sind beide Summanden vom Typ $A_3 \frac{1}{p^2} A_n^{2-}$, so dass mit (2.14) und (3.8), (3.9) folgt

$$\begin{aligned}
 A_{n+1}^{2-} &= \frac{[(j+1)\widehat{P}_{j,(j+1)}]^3}{[\hat{j}(j+1)][\widehat{P}\hat{j}]} \times \frac{1}{\langle j(j+1) \rangle [j(j+1)]} \\
 &\quad \times \frac{\langle \widehat{P}_{j,(j+1)} k \rangle^4}{\langle \widehat{P}(j+2) \rangle \cdots \langle n(n+1) \rangle \langle (n+1)1 \rangle \cdots \langle (j-2)\widehat{(j-1)} \rangle \langle \widehat{(j-1)}\widehat{P} \rangle} \\
 &+ \frac{[(j-2)\widehat{(j-1)}]^3}{[\widehat{P}(j-2)][\widehat{(j-1)}\widehat{P}]} \times \frac{1}{\langle (j-2)(j-1) \rangle [(j-2)(j-1)]} \\
 &\quad \times \frac{\langle \hat{j}k \rangle^4}{\langle \hat{j}(j+1) \rangle \cdots \langle n(n+1) \rangle \langle (n+1)1 \rangle \cdots \langle (j-3)\widehat{P} \rangle \langle \widehat{P}\hat{j} \rangle}.
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

Hiervon entfällt der komplette erste Summand, da wegen (3.39) gilt

$$[(j+1)\widehat{P}_{j,(j+1)}] = 0. \tag{3.50}$$

Für den verbleibenden Summanden können wir aus (3.31) bzw. (3.32) auf

$$\lambda_j = \lambda_j \quad \text{und} \quad \widetilde{\lambda}_{\widehat{j-1}} = \widetilde{\lambda}_{(j-1)} \tag{3.51}$$

schließen. Von den verbleibenden Produkten mit \widehat{P} , ist es geschickt sich auf $[\widehat{P}(j-2)]$ und $\langle (j-3)\widehat{P} \rangle$ zu konzentrieren, da die anderen beiden nach (3.39) bzw. (3.40) bei

deren Berechnung auftreten.

$$[\widehat{P}(j-2)] = \langle (j-1) j \rangle [(j-2) (j-1)] \times \langle j \widehat{P} \rangle^{-1} \quad (3.52)$$

$$\langle (j-3) \widehat{P} \rangle = \langle (j-3) (j-2) \rangle [(j-2) (j-1)] \times [\widehat{P}(j-1)]^{-1} \quad (3.53)$$

Damit geht (3.49) über in

$$\begin{aligned} A_{n+1}^{2-} &= \frac{[\widehat{P}(j-1)] \langle j \widehat{P} \rangle}{[(j-1) \widehat{P}] \langle \widehat{P} j \rangle} \times \frac{1}{\langle (j-2) (j-1) \rangle \langle (j-1) j \rangle} \\ &\times \frac{\langle j k \rangle^4}{\langle j (j+1) \rangle \cdots \langle n (n+1) \rangle \langle (n+1) 1 \rangle \cdots \langle (j-3) (j-2) \rangle} \\ &= \frac{\langle j k \rangle^4}{\langle (j-2) (j-1) \rangle \cdots \langle n (n+1) \rangle \langle (n+1) 1 \rangle \cdots \langle (j-3) (j-2) \rangle}, \end{aligned} \quad (3.54)$$

was den Induktionsbeweis vollendet.

Eine äußerst bemerkenswerter Aspekt dieses Beweises ist der Umstand, dass wir *in keinem Schritt unser Wissen über den tatsächlichen Wert von $z_{i,j}$ benötigt* haben {25}. Allerdings können wir aus diesem Beweis auch einen wesentlichen Unterschied zum CSW Formalismus abstrahieren, denn es gilt

Feststellung 3.4. *Die Verwendung der BCFW Rekursionsformel setzt im allgemeinen die Existenz von MHV und $\overline{\text{MHV}}$ Vertices voraus.*

3.5. Zusammenfassung

Offensichtlich unterliegt der Störungstheorie eine bisher verborgene Struktur, die einen Zugang abseits bzw. unter impliziter Verwendung der Feynmanregeln ermöglicht. Auch wenn wir die genaue Struktur momentan nicht wissen, so ist doch in jedem Fall klar ein tiefer Zusammenhang mit der in Kapitel 2 eingeführten Formulierung zu erkennen.

Es gibt nun verschiedene Arbeiten die beide Zugänge des Amplitudenkalküls miteinander in Verbindung zu bringen. In der Regel wählt man dabei die Rekursionstechnik um die Gültigkeit von *MHV* Vertices zu verifizieren {25}, vor allem außerhalb des masselosen Sektors. Interessanterweise ist das im Beweis der BCFW Rekursionsformel {24} aber gerade andersherum.

Unser primäres Interesse gilt jedoch der Frage, wie man möglichst schematisch Amplituden mit großer Anzahl externer Gluonen berechnet. Dazu untersuchen wir im nächsten Kapitel den für die BCFW Rekursion einfachsten Fall. Die Rechnung wird uns dabei offenbaren, dass die BCFW Rekursion eine technische Abwandlung des CSW Zugangs ist.

4 | Split Helicity Gluonamplituden

Die Entwicklung des Amplitudenkalküls hat Anstoß zur Entwicklung vieler neuer wie auch zur Vereinfachung alter Ergebnisse im Bereich der perturbativen QFT gegeben. Bemerkenswert sind dabei vor allem zwei Resultate: Das von D. Kosower für alle Next to MHV Baumgraphen-Gluonamplituden {12}, sowie das von R. Britto, B. Feng, R. Roiban, M. Spradlin und A. Volovich für Split Helicity Amplituden {13}. In beiden Fällen konnte eine geschlossene Lösung gewonnen werden. Während das zuerst genannte Ergebnis unter Verwendung des CSW Zugangs erzielt wurde, benutzten die Autoren des letzteren die BCFW Rekursionsformel. Wir werden uns in diesem Kapitel nun genauer mit dieser Arbeit und ihren Ideen auseinandersetzen und so ein Schema ableiten, das geeignet ist auch Gluonamplituden mit komplizierterer Helizitätsstruktur zu berechnen.

4.1. Motivation

Wir beginnen dieses Kapitel mit der abstrakteren

Definition 4.1. Eine Helizitätsklasse ist eine Menge von Gluonpartialamplituden, die gleiche Helizitätsstruktur bei variabler Gluonenzahl aufweist.

Im Sinne dieser allgemeinen Klassifizierung bilden die Amplituden $A_n^{q^-}$ selbst für jeden Wert von q eine separate Helizitätsklasse. Allerdings ist die zugehörige Struktur für größere q zu unbestimmt, um konkrete Aussagen treffen zu können. Spezialisieren wir uns aber auf die eingangs erwähnten Split Helicity Gluonamplituden mit ihrer

Definition 4.2. Die Gluonpartialamplituden vom Typ

$$A_n(1^-, 2^-, \dots, q^-, (q+1)^+, \dots, n^+) =: A_{q, n-q} \quad (4.1)$$

bilden die Klasse der Split Helicity Amplituden.

so stellen wir fest, dass

$$A_{q, n-q} \stackrel{BCFW}{=} A_{2,1} p_{1,2}^2 A_{q-1, n-q} + A_{q, n-q-1} p_{1, n-2}^2 A_{1,2}. \quad (4.2)$$

Setzen wir für die Propagatoren und die Dreipunktsfunktionen ihre analytischen Ausdrücke ein, so finden wir

Feststellung 4.1. *Split Helicity Amplituden bilden eine geschlossene Helizitätsklasse unter der BCFW Rekursion!*

Ein analoges Resultat können wir aus unserem Beweis der Parke-Taylor Formel für *MHV* Amplituden ablesen. Da für diese eine geschlossene Lösung existiert, drängt sich die Frage auf, ob für Split Helicity Amplituden auch eine kompakte Formel gefunden werden kann. Erste positive Hinweise dazu liefern die primitiven Fälle $q = 1$ und $q = 2$, die eine solche besitzen.

Wie schon in Abschnitt 3.4.2 angekündigt, treffen wir die äußerst beliebte Wahl $(1, n) \mapsto (\hat{1}, \hat{n})$ zur Ableitung aller nachfolgenden Ergebnisse. Es gilt deshalb

$$\begin{aligned} \hat{P}_1 &= P_1 + \frac{p_{1,i}^2}{\langle 1|P_{1,i}|n \rangle} \lambda_1 \tilde{\lambda}_n, \\ \hat{P}_n &= P_n - \frac{p_{1,i}^2}{\langle 1|P_{1,i}|n \rangle} \lambda_1 \tilde{\lambda}_n, \\ \hat{P}_{1,i} &= P_{1,i} + \frac{p_{1,i}^2}{\langle 1|P_{1,i}|n \rangle} \lambda_1 \tilde{\lambda}_n. \end{aligned} \quad (4.3)$$

4.2. Die MHV-Lösung

Schon kurze Zeit nach der oben vorgestellten Erkenntnis publizierten die eingangs erwähnten Autoren einen Gemeinschaftsartikel {13} mit einem Lösungsvorschlag. Bei korrekter Formulierung muss dieser wie folgt lauten:

$$A_{q,n-q}^{MHV} = \sum_{k=0}^{\min(q-3, n-q-2)} \sum_{A_k, B_{k+1}} \frac{N_1 N_2 N_3}{D_1 D_2 D_3} + E \quad (4.4)$$

Dabei gilt für die Mengen A_k bzw. B_{k+1} , mit der Kardinalität $k/k+1$:

$$\begin{aligned} A_k &= \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subseteq \{2, \dots, q-2\} & (a_i < a_{i+1}) \\ B_{k+1} &= \{b_{k+1}, b_k, \dots, b_1\} \subseteq \{q+1, \dots, n-1\} & (b_{i+1} < b_i) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Ferner sind die Größen N_l und D_l bestimmt durch:

$$\begin{aligned} N_1 &= \langle 1 | P_{2,b_1} P_{b_1+1,a_1} P_{a_1+1,b_2} \cdots P_{b_{k+1}+1,q-1} | q \rangle^3 \\ N_2 &= \langle b_1 + 1 \ b_1 \rangle \langle b_2 + 1 \ b_2 \rangle \cdots \langle b_{k+1} + 1 \ b_{k+1} \rangle = \prod_{i=1}^{k+1} \langle b_i + 1 \ b_i \rangle \\ N_3 &= [a_1 \ a_1 + 1] \cdots [a_k \ a_k + 1] = \prod_{i=1}^k [a_i \ a_i + 1] \\ D_1 &= P_{2,b_1}^2 P_{b_1+1,a_1}^2 P_{a_1+1,b_2}^2 \cdots P_{b_{k+1}+1,q-1}^2 \\ D_2 &= F_{q,1} \{ \delta_{q,3} (1 - \bar{F}_{2,q-1}) + \bar{F}_{2,q-1} \} \quad \text{mit} \\ &F_{q,1} := \langle q \ q + 1 \rangle \langle q + 1 \ q + 2 \rangle \cdots \langle n \ 1 \rangle \quad \bar{F}_{2,q-1} := [2 \ 3] [3 \ 4] \cdots [q \ q - 1] \\ D_3 &= [2 | P_{2,b_1} | b_1 + 1 \rangle \times \langle b_1 | P_{b_1+1,a_1} | a_1 \rangle \times [a_1 + 1 | P_{a_1+1,b_2} | b_2 + 1 \rangle \times \\ &\quad \cdots \times \langle b_{k+1} | P_{b_{k+1}+1,q-1} | q - 1 \rangle \\ E &= \delta_{q,2} \frac{\langle q - 1 \ q \rangle^3}{F_{q,q-1}} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Um ein besseres Verständnis für diese Terme zu erhalten, wurde zudem ein passendes graphisches Schema entwickelt. Hierzu ordnet man alle Gluonen im Uhrzeigersinn auf einem Oval oder Kreis so an, dass die Gluonen mit negativer Helizität auf der oberen Hälfte liegen während die mit positiver unten zu finden sind.

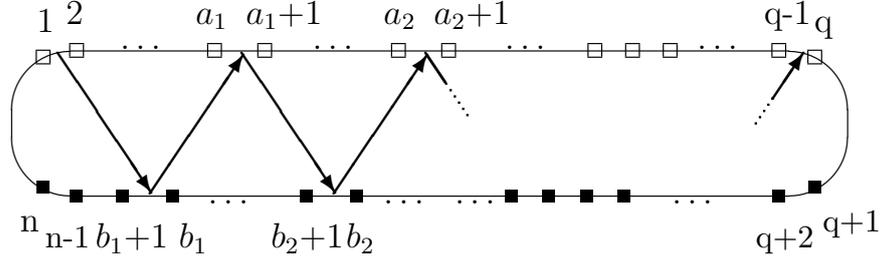


Abbildung 4.1.: vorwärts Zickzackdiagramm

Danach verbindet man die Gluonen entsprechend der Propagatorindizes in D_1 , wobei die Linien (= Propagatoren) immer zwischen den benachbarten Gluonen beginnen und enden (s. Abb. 4.1). Auf diese Weise entsteht ein Diagramm aus vorwärts gerichteten Zickzacklinien. Ganz offensichtlich ist es möglich jedem in (4.4) auftauchenden Summanden, bis auf E , mit einem solchen vorwärts Zickzackdiagramm zu assoziieren (und umgekehrt).

Tatsächlich jedoch verspermt diese Interpretation die wahre Natur der Lösung. Konzentrieren wir uns stärker auf die algebraische Struktur so stellen wir fest, dass

$$\boxed{\frac{N_1}{F_{q,1}} \sim A_{MHV}}. \quad (4.7)$$

In Anlehnung daran führen wir die Bezeichnung MHV -Lösung für (4.4) ein.

Werfen wir noch kurz einen genaueren Blick auf die MHV -Lösung. Die eingebauten Kroneckersymbole (\equiv Fallunterscheidungen) verraten uns, dass es sich eigentlich um eine zusammengesetzte Lösung handelt. Insbesondere kann ohne den Zusatzterm E die gesicherte Parke-Taylor Formel nicht reproduziert werden. Es existieren nämlich auch negative obere Summationsgrenzen und zwar genau dann wenn

$$\begin{aligned} q - 3 < 0 &\Leftrightarrow q < 3 && \Rightarrow A_{0,n}, A_{1,n-1}, A_{MHV}, \\ n - q - 2 < 0 &\Leftrightarrow n - q < 2 && \Rightarrow A_{n,0}, A_{n-1,1}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

was die Notwendigkeit des Summanden E belegt. Darüber hinaus ist, *ohne den hier zusätzlich eingeführten Term E , kein induktiver Beweis* der gesamten Formel möglich.

Die Implementierung des zweiten Kroneckersymbols (in D_2) ergibt sich ebenso aus einem konsequenten Studium von [13] und kann in enger Verbindung mit dem Term E gesehen werden, wie uns ein sorgfältiger Induktionsbeweis noch zeigen wird. Ein weiteres Manko ist

Feststellung 4.2. Die MHV-Lösung ist nicht manifest symmetrisch unter Paritäts-
transformation. Die Relation

$$(A_{q,n-q}^{MHV})^* = A_{n-q,q}^{MHV}$$

ist nur durch Umformungen der jeweiligen Endergebnisse zu erreichen.

Hierzu betrachten wir ausführlicher die Berechnung von \overline{MHV} Amplituden. Aus der Formel geht hervor, dass es nur den folgenden Summanden gibt:

$$A_{n-2,2}^{MHV} = \frac{1}{F_{n-2,1} \{ \delta_{q,3} (1 - \overline{F}_{2,n-3}) + \overline{F}_{2,n-3} \}} \frac{\langle 1 | P_{2,n-1} P_{n,n-3} | n-2 \rangle^3}{P_{2,n-1}^2 P_{n,n-3}^2} \quad (4.9)$$

$$\times \frac{\langle n n-1 \rangle}{[2 | P_{2,n-1} | n \rangle \langle n-1 | P_{n,n-3} | n-3 \rangle]}.$$

Offensichtlich entspricht dies nicht der uns bekannten kompakten Darstellung. Zur Umformung benötigen wir nur die Impulserhaltung nach der

$$P_{n,n-3} = P_n + P_1 + \dots + P_{n-3} = -(P_{n-2} + P_{n-1}) \quad \text{und} \quad (4.10)$$

$$P_{2,n-1} = P_2 + P_3 + \dots + P_{n-1} = -(P_n + P_1)$$

ist. Wir erhalten so ¹

$$A_{n-2,2}^{MHV} = \frac{1}{F_{n-2,1} \{ \delta_{q,3} (1 - \overline{F}_{2,n-3}) + \overline{F}_{2,n-3} \}} \frac{\langle 1 | P_n P_{n-1} | n-2 \rangle^3}{\langle n 1 \rangle [n 1] \langle n-1 n-2 \rangle [n-1 n-2]}$$

$$\times \frac{\langle n n-1 \rangle}{[2 1] \langle 1 n \rangle \langle n-1 n-2 \rangle [n-2 n-3]}$$

$$= \frac{1}{\{ \delta_{q,3} (1 - \overline{F}_{2,n-3}) + \overline{F}_{2,n-3} \}} \frac{[n-1 n]^3}{[n-3 n-2] [n-2 n-1] [n 1] [1 2]}. \quad (4.11)$$

Da für \overline{MHV} Amplituden $n = q + 2$ ist, liest sich dieses Ergebnis auch als

$$A_{n-2,2}^{MHV} = A_{q,n-q} = \frac{1}{\{ \delta_{q,3} (1 - \overline{F}_{2,q-1}) + \overline{F}_{2,q-1} \}} \frac{[q+1 q+2]^3}{[q-1 q] [q q+1] [q+2 1] [1 2]}, \quad (4.12)$$

was wegen der Definition von $\overline{F}_{2,q-1}$ mit dem bekannten Ausdruck übereinstimmt. Im Sonderfall $q = 3$ wird dabei, dank der δ -Konstruktion, der Faktor $\overline{F}_{2,q-1}$ unterdrückt, so dass man das richtige Ergebnis erhält.

¹für Einzelheiten im Umgang mit den verschiedenen Spinorprodukten siehe Anhang C

4.3. Die \overline{MHV} -Lösung

Bereits in ihrem Artikel weisen die Autoren auf die Existenz einer, ihrer Meinung nach, weiteren Realisierung der Split Helicity Lösung hin. Dabei sollen Anfang und Ende der Zickzackstrecke jedoch im Bereich der Gluonen positiver Helizität liegen (s. Abb. 4.2). Mit etwas Übung findet man die zugehörige Gleichung relativ schnell zu

$$A_{q,n-q}^{\overline{MHV}} = \sum_{k=0}^{\min(n-q-3, q-2)} \sum_{A_k, B_{k+1}} \frac{\overline{N}_1 \overline{N}_2 \overline{N}_3}{\overline{D}_1 \overline{D}_2 \overline{D}_3} + \overline{E}, \quad (4.13)$$

wo jetzt für die Mengen A_k bzw. B_{k+1} gilt:

$$\begin{aligned} B_{k+1} &= \{b_{k+1}, b_k, \dots, b_1\} \subseteq \{1, \dots, q-1\} & (b_{i+1} < b_i) \\ A_k &= \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subseteq \{q+2, \dots, n-2\} & (a_i < a_{i+1}). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Außerdem ergeben sich die Größen \overline{N}_l und \overline{D}_l zu

$$\begin{aligned} \overline{N}_1 &= [q+1 | P_{q+2, b_1} P_{b_1+1, a_1} P_{a_1+1, b_2} \cdots P_{b_{k+1}+1, n-1} | n]^3 \\ \overline{N}_2 &= [b_1 + 1 \ b_1] \cdots [b_{k+1} + 1 \ b_{k+1}] = \prod_{i=1}^{k+1} [b_i + 1 \ b_i] \\ \overline{N}_3 &= \langle a_1 \ a_1 + 1 \rangle \langle a_2 \ a_2 + 1 \rangle \cdots \langle a_k \ a_k + 1 \rangle = \prod_{i=1}^k \langle a_i \ a_i + 1 \rangle \\ \overline{D}_1 &= P_{q+2, b_1}^2 P_{b_1+1, a_1}^2 P_{a_1+1, b_2}^2 \cdots P_{b_{k+1}+1, n-1}^2 \\ \overline{D}_2 &= \overline{F}_{n, q+1} \{ \delta_{n-q, 3} (1 - F_{q+2, n-1}) + F_{q+2, n-1} \} \\ \overline{D}_3 &= \langle q+2 | P_{q+2, b_1} | b_1 + 1 \rangle \times [b_1 | P_{b_1+1, a_1} | a_1 \rangle \times \langle a_1 + 1 | P_{a_1+1, b_2} | b_2 + 1 \rangle \times \\ &\quad \cdots \times [b_{k+1} | P_{b_{k+1}+1, n-1} | n-1 \rangle \\ \overline{E} &= \delta_{n-q, 2} \frac{[n-1 \ n]^3}{\overline{F}_{n, n-1}} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Mit Hinsicht auf unseren algebraischen Standpunkt geben wir dieser Lösung den Namen \overline{MHV} -Lösung.

Weil die \overline{MHV} -Lösung keine prinzipielle Neuerung darstellt, leidet sie an analogen Unstimmigkeiten wie ihr Gegenpart. So lautet die Bedingung für negative obere

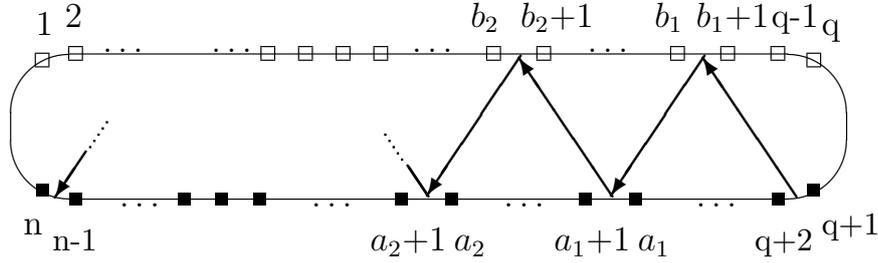


Abbildung 4.2.: rückwärts Zickzackdiagramm

Summationsgrenzen diesmal:

$$\begin{aligned} q - 2 < 0 &\Leftrightarrow q < 2 &\Rightarrow A_{0,n}, A_{1,n-1}, \\ n - q - 3 < 0 &\Leftrightarrow n - q < 3 &\Rightarrow A_{n,0} A_{n-1,1}, A_{\overline{MHV}}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Das heißt aber, dass uns diese Lösung die Berechnung von MHV Amplituden direkt gestattet. Gemäß (4.13) tritt dabei nur ein einzelner Summand auf, welcher

$$\begin{aligned} A_{MHV}^{\overline{MHV}} &= \frac{1}{\overline{F}_{n,3} \{ \delta_{n-2,3} (1 - F_{4,n-1}) + F_{4,n-1} \}} \frac{[3|P_{4,1}P_{2,n-1}|n]^3}{P_{4,1}^2 P_{2,n-1}^2} \\ &\times \frac{[12]}{\langle 4|P_{4,1}|2 \rangle [1|P_{2,n-1}|n-1 \rangle} \end{aligned} \quad (4.17)$$

lautet. Wie schon bei der Berechnung der \overline{MHV} Amplituden, benötigen wir auch hier wieder die Impulserhaltung zur Umformung in den bekannten Ausdruck. Mit

$$P_{4,1} = -P_{2,3} \quad \text{und} \quad P_{2,n-1} = -P_{n,1} \quad (4.18)$$

geht die rechte Seite oben dann über in

$$\begin{aligned} A_{MHV}^{\overline{MHV}} &= \frac{1}{\overline{F}_{n,3} \{ \delta_{n-2,3} (1 - F_{4,n-1}) + F_{4,n-1} \}} \frac{[3|P_{2,3}P_{n,1}|n]^3}{\langle 23 \rangle [23] \langle n1 \rangle [n1]} \\ &\times \frac{[12]}{\langle 43 \rangle [32] [1n] \langle nn-1 \rangle} \\ &= \frac{1}{\{ \delta_{n-2,3} (1 - F_{4,n-1}) + F_{4,n-1} \}} \frac{\langle 12 \rangle^3}{\langle 23 \rangle \langle 34 \rangle \langle n-1n \rangle \langle n1 \rangle}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

was in allen Fällen gleich der kompakten Darstellung von MHV Amplituden ist.

Für beliebiges q stehen wir also hier vor dem gleichen Symmetrieproblem wie zuvor.

Allerdings scheint die \overline{MHV} -Lösung die notwendige Struktur zu besitzen um den Gegenpart für die MHV -Lösung zu bilden und umgekehrt.

4.4. Die symmetrische Lösung

Bis jetzt verfügen wir über zwei vollwertige Lösungen, bei denen die allgemeine Symmetrie (3.1) nicht ohne weiteres ersichtlich ist. Gleichzeitig scheint aber in diesem Punkt ein Zusammenhang zwischen beiden Lösungen zu bestehen, wie man für den Sonderfall $q = 2$ sofort erkennen kann. Wir wollen daher einmal die Auswirkungen der Paritätstransformation auf die MHV -Lösung genauer untersuchen. Zunächst sind nach (2.5) die Klammersymbole zu vertauschen, also $\langle | \rangle \longleftrightarrow [|]$. Wegen unserer Definition 4.1 am Anfang des Kapitels geht die Helizitätsinvertierung aber zusätzlich mit einer zyklischen Rotation der Gluonen einher. Dadurch werden die Gluonen mit vormals positiver Helizität nach hinten geschoben, was nach Kapitel 1.3 eine jederzeit zulässige Umformung darstellt. Also finden wir

$$i \mapsto (n - q) + i \text{ für } i \in \{1, \dots, q\} \quad \wedge \quad j \mapsto j - q \text{ für } j \in \{q + 1, \dots, n\}, \quad (4.20)$$

so dass die Anzahl der Gluonen mit positiver Helizität gegeben ist durch $n - q = \tilde{q}$. Wie man leicht an einem Term wie N_1 nachvollzieht, reproduzieren wir mit dieser Vorschrift gerade die \overline{MHV} -Lösung. Konsequenterweise vermutet man daher in

$$\boxed{A_{q,n-q}^{sym} = \frac{1}{2} \left(A_{q,n-q}^{MHV} + A_{q,n-q}^{\overline{MHV}} \right)} \quad (4.21)$$

den richtigen Ansatz für eine konsistente symmetrische Lösung.

Aufgrund der Rechnungen oben mag sich der aufmerksame Leser fragen, ob hierin die Summanden E bzw. \overline{E} nicht überflüssig sind. Das dem nicht so ist liegt allein an der Amplitude $A_{2,2}$, welche gleichzeitig MHV und \overline{MHV} Amplitude ist. Sie würde dann nicht von der Lösung erfasst werden und müßte statt der anderen beiden Terme implementiert werden.

Bemerkung. Wegen ihrer Eigenständigkeit greift man in der Praxis zur effizienten Berechnung von Amplituden selbstverständlich, je nach Verhältnis von q zu $n - q$, lieber auf die MHV - bzw. \overline{MHV} -Lösung allein zurück.

Wir folgen auch im nächsten Abschnitt dem Weg, der in {13} besprochen wurde und überzeugen uns von der Korrektheit unserer präsentierten Lösungen per Induktionsbeweis.

4.5. Induktionsbeweis der MHV-Lösung

Wie man den Formeln der vorangegangenen Abschnitte entnimmt, ist die Anzahl der Gluonen mit positiver (oder negativer) Helizität der entscheidende Parameter. Wir führen daher einen *Induktionsbeweis in q* , bei beliebiger Gluonenzahl n . Ausgehend von der MHV-Lösung vollziehen wir dabei den *Induktionsschritt von $q - 1$ nach q* , so dass der notwendige rekursive Zusammenhang mittels der BCFW Rekursionsformel erarbeitet werden kann. Als *Induktionsanker* werden uns die *Amplituden $A_{0,n}$* dienen, alle anderen eingearbeiteten Sonderfälle zeigen wir durch Fallunterscheidung.

Im Vordergrund des Beweises stehen vor allem die technischen Details, was uns ein besseres Verständnis der Funktionsweise der BCFW Rekursionsformel erlaubt. Das wiederum wird es uns später ermöglichen, den eingangs erwähnten konstruktiven Zugang zu entwickeln.

4.5.1. Ableitung eines rekursiven Zusammenhangs

Entsprechend dem Einleitungsabschnitt wählen wir die Manipulation $(1, n) \mapsto (\hat{1}, \hat{n})$, die zu den Ergebnissen (4.3) führt. Betrachten wir damit genauer, was eine einmalige Anwendung der BCFW Rekursion auf $A_{q,n-q}$ bewirkt.

$$\begin{aligned}
A_{q,n-q} &= A\left(\hat{1}^-, 2^-, -\hat{P}_{1,2}^+\right) \left(p_{1,2}\right)^{-2} A\left(\hat{P}_{1,2}^-, 3^-, \dots, q^-, (q+1)^+, \dots, \hat{n}^+\right) \\
&\quad + A\left(\hat{1}^-, 2^-, \dots, (n-2)^+, -\hat{P}_{1,n-2}^+\right) \left(p_{1,n-2}\right)^{-2} A\left(\hat{P}_{1,n-2}^-, (n-1)^+, \hat{n}^+\right) \\
&= \frac{[n2]}{[n1][12]} \frac{\langle 12 \rangle^2}{\langle 1 \hat{P}_{1,2} \rangle^2} A\left(\hat{P}_{1,2}^-, 3^-, \dots, q^-, (q+1)^+, \dots, \hat{n}^+\right) \\
&\quad + \frac{\langle n-11 \rangle}{\langle n-1n \rangle \langle n1 \rangle} \frac{[n-1n]^2}{[\hat{P}_{n-1,n} n]^2} A\left(\hat{1}^-, 2^-, \dots, (n-2)^+, \hat{P}_{n-1,n}^+\right)
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Offensichtlich ergibt sich jeweils ein Produkt aus 2 Amplituden, das wir mittels der Parke-Taylor Formel auflösen könnten, wären nicht die *blau* gehaltenen Beiträge vorhanden. Leider helfen uns hier die Identitäten (3.39) und (3.40) nicht weiter. Um das Problem zu beheben und die Produkte berechnen zu können, inspizieren wir

die Objekte $\widehat{P}_{1,2}$ und $\widehat{P}_{n-1,n}$ noch einmal genauer.

$$\begin{aligned}
\left(\widehat{P}_{1,2}\right)_{A\dot{A}} &\stackrel{(4.3)}{=} (P_1)_{A\dot{A}} + (P_2)_{A\dot{A}} + \frac{[12]}{[2n]} \left(\lambda_1 \tilde{\lambda}_n\right)_{A\dot{A}} \\
&= (P_2)_{A\dot{A}} + \frac{1}{[2n]} (\lambda_1)_A \left\{ [2n] (\tilde{\lambda}_1)_{\dot{A}} + [12] (\tilde{\lambda}_n)_{\dot{A}} \right\} \\
&\stackrel{(2.9)}{=} (P_2)_{A\dot{A}} - \frac{[n1]}{[2n]} (\lambda_1)_A (\tilde{\lambda}_2)_{\dot{A}} \\
&\stackrel{(2.6)}{=} (P_2)_{A\dot{A}} + \frac{[n1]}{[n2]} (\lambda_1 \tilde{\lambda}_2)_{A\dot{A}} \\
&= \left(\lambda_2 + \frac{[n1]}{[n2]} \lambda_1 \right)_A (\tilde{\lambda}_2)_{\dot{A}} =: \left(\widehat{P}_2\right)_{A\dot{A}}
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Analog findet man

$$\left(\widehat{P}_{n-1,n}\right)_{A\dot{A}} = (\lambda_{n-1})_A \left(\tilde{\lambda}_{n-1} + \frac{\langle n1 \rangle}{\langle n-11 \rangle} \tilde{\lambda}_n \right)_{\dot{A}} =: \left(\widehat{P}_{n-1}\right)_{A\dot{A}} \tag{4.24}$$

Mit diesen Umformungen lautet unser Ergebnis (4.22) nun

$$\begin{aligned}
A_{q,n-q} &= \frac{[n2]}{[n1][12]} A \left(\widehat{2}^-, 3^-, \dots, q^-, (q+1)^+, \dots, \widehat{n}^+ \right) \\
&\quad + \frac{\langle n-11 \rangle}{\langle n-1n \rangle \langle n1 \rangle} A \left(\widehat{1}^-, 2^-, \dots, (n-2)^+, \widehat{n-1}^+ \right).
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Wir erhalten also schematisch eine Zerlegung vom Typ

$$A_{q,n-q} = v A_{q-1,n-q} + h A_{q,n-q-1}, \tag{4.26}$$

die unseren Ansprüchen nicht ganz genügt. Um den gewünschten Zusammenhang zu erhalten muss der zweite Summand erneut der BCFW Rekursion unterworfen werden. Dabei entstehen wieder 2 Summanden, von denen nur der erste die $q-1$ Gluonen positiver Helizität aufweist. Auf diese Weise entsteht eine Iteration, bei der der zu behandelnde (hintere) Summand nach dem j -ten Schritt vom Typ $A_{q,(n-q)-j}$ ist. Das Verfahren bricht also ab, wenn $(n-q) - j = 2$. Leider verfügt dieser Summand aber noch über q negative Gluonen. Die benötigte Anzahl an Schritten ist somit $j = (n-q) - 2 + 1 = (n-q) - 1$. (Zur Erinnerung: \overline{MHV} Amplituden bilden eine geschlossene Klasse.)

Als vorläufiges Resultat unserer Bemühungen bekommen wir folgende rekursive Darstellung von $A_{q,n-q}$:

$$\begin{aligned}
 A_{q,n-q} &= \sum_{j=1}^{n-q-1} \left[\delta_{1,j} v_j + (1 - \delta_{1,j}) v_j \prod_{l=1}^{j-1} h_l \right] A \left(\widehat{2}_j^-, 3^-, \dots, q^-, \dots, n - \widehat{(j-1)}^+ \right) \\
 &=: \sum_{j=1}^{n-q-1} d_j A \left(\widehat{2}_j^-, 3^-, \dots, q^-, \dots, n - \widehat{(j-1)}^+ \right)
 \end{aligned}
 \tag{4.27}$$

In Verallgemeinerung zu (4.22) sind die Vorfaktoren dabei bestimmt durch

$$\begin{aligned}
 v_j &= p_{\widehat{1}_{j-1} 2}^{-2} A \left(\widehat{1}_j^-, 2^-, \widehat{P}_{\widehat{1}_{j-1} 2}^+ \right) \\
 &= \frac{\langle 1 2 \rangle^2}{[\widehat{1}_{j-1} 2] \langle 2 \widehat{P}_{\widehat{1}_{j-1} 2} \rangle \langle \widehat{P}_{\widehat{1}_{j-1} 2} 1 \rangle}, \\
 h_l &= p_{n-l, n - \widehat{(l-1)}}^{-2} A \left(-\widehat{P}_{n-l, n - \widehat{(l-1)}}^-, (n-l)^+, n - \widehat{(l-1)}^+ \right) \\
 &= \frac{[n-l, n - \widehat{(l-1)}]^2}{\langle n-l, n - (l-1) \rangle [n - \widehat{(l-1)} \widehat{P}_{n-l, n - \widehat{(l-1)}}] [\widehat{P}_{n-l, n - \widehat{(l-1)}} n-l]}.
 \end{aligned}
 \tag{4.28}$$

Mittels der Identitäten (3.39), (3.40) für $\widehat{P}_{x,y}$ und Manipulation durch Schoutenidentitäten wie oben lassen sich diese Gleichungen umschreiben zu

$$\begin{aligned}
 v_j &= \frac{[2, n - \widehat{(j-1)}]}{[\widehat{1}_{j-1} 2] [\widehat{1}_{j-1}, n - \widehat{(j-1)}]}, \\
 h_l &= \frac{\langle 1, n-l \rangle}{\langle n-l, n - (l-1) \rangle \langle 1, n - \widehat{(l-1)} \rangle}.
 \end{aligned}
 \tag{4.29}$$

Unsere nächste Aufgabe besteht nun darin die expliziten Ausdrücke der Spinoren von $(\widehat{P}_1)_j$, $(\widehat{P}_2)_j$ und $\widehat{P}_{n-(j-1)}$ abzuleiten. Hierfür ist es nützlich, die im ersten Schritt

4. Split Helicity Gluonamplituden

vorgenommenen Umformungen zu rekapitulieren.

$$\begin{aligned}
\tilde{\lambda}_1 &\xrightarrow{BCFW} \tilde{\lambda}_1 + \frac{\langle n-1 n \rangle}{\langle n-1 1 \rangle} \tilde{\lambda}_n = (\tilde{\lambda}_{\hat{1}})_1 \\
\lambda_2 &\xrightarrow{Schouten} \lambda_2 + \frac{[n 1]}{[n 2]} \lambda_1 = (\lambda_{\hat{2}})_1 \\
\lambda_n &\xrightarrow{BCFW} \lambda_n + \frac{[1 2]}{[n 2]} \lambda_1 = \lambda_{\hat{n}} \\
\tilde{\lambda}_{n-1} &\xrightarrow{Schouten} \tilde{\lambda}_{n-1} + \frac{\langle n 1 \rangle}{\langle n-1 1 \rangle} \tilde{\lambda}_n = \tilde{\lambda}_{\widehat{n-1}}
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Entsprechend lauten diese Gleichungen für den zweiten Schritt

$$\begin{aligned}
(\tilde{\lambda}_{\hat{1}})_1 &\xrightarrow{BCFW} (\tilde{\lambda}_{\hat{1}})_1 + \frac{\langle n-2 n-1 \rangle}{\langle n-2 1 \rangle} \tilde{\lambda}_{\widehat{n-1}} = (\tilde{\lambda}_{\hat{1}})_2, \\
\lambda_2 &\xrightarrow{Schouten} \lambda_2 + \frac{[\widehat{n-1} \hat{1}_1]}{[n-1 2]} \lambda_1 = (\lambda_{\hat{2}})_2, \\
\lambda_{n-1} &\xrightarrow{BCFW} \lambda_{n-1} + \frac{[\hat{1}_1 2]}{[n-1 2]} \lambda_1 = \lambda_{\widehat{n-1}}, \\
\tilde{\lambda}_{n-2} &\xrightarrow{Schouten} \tilde{\lambda}_{n-2} + \frac{\langle n-1 1 \rangle}{\langle n-2 1 \rangle} \tilde{\lambda}_{\widehat{n-1}} = \tilde{\lambda}_{\widehat{n-2}},
\end{aligned} \tag{4.31}$$

so dass man auf

$$\boxed{
\begin{aligned}
(\tilde{\lambda}_{\hat{1}})_j &= (\tilde{\lambda}_{\hat{1}})_{j-1} + \frac{\langle n-j n-(j-1) \rangle}{\langle n-j 1 \rangle} \tilde{\lambda}_{\widehat{n-(j-1)}} \\
(\lambda_{\hat{2}})_j &= \lambda_2 + \frac{[\widehat{n-(j-1)} \hat{1}_{j-1}]}{[n-(j-1) 2]} \lambda_1 \\
\lambda_{\widehat{n-(j-1)}} &= \lambda_{n-(j-1)} + \frac{[\hat{1}_{j-1} 2]}{[n-(j-1) 2]} \lambda_1 \\
\tilde{\lambda}_{\widehat{n-j}} &= \tilde{\lambda}_{n-j} + \frac{\langle n-(j-1) 1 \rangle}{\langle n-j 1 \rangle} \tilde{\lambda}_{\widehat{n-(j-1)}}
\end{aligned}
} \tag{4.32}$$

im j -ten Schritt schließt. (Es gilt $(\tilde{\lambda}_{\hat{1}})_0 \equiv \tilde{\lambda}_1$ und $\tilde{\lambda}_{\hat{n}} \equiv \tilde{\lambda}_n$.)

Glücklicherweise lässt sich die letzte Gleichung einfach auflösen zu ¹

$$\boxed{\tilde{\lambda}_{\widehat{n-(j-1)}} = -\frac{1}{\langle n-(j-1) 1 \rangle} P_{2,n-j} |1 \rangle}. \quad (4.33)$$

Der gewählte Index ist dabei bereits unserer Summation angepasst. Als nächstes kann man die Gleichung für $(\lambda_{\hat{1}})_j$ umformen zu

$$\begin{aligned} (\tilde{\lambda}_{\hat{1}})_j &= \tilde{\lambda}_1 + \sum_{l=0}^{j-1} \frac{\langle n-(l+1) n-l \rangle}{\langle n-(l+1) 1 \rangle} \tilde{\lambda}_{n-l} \\ &= \frac{1}{\langle n-j 1 \rangle} \left\{ \langle n-j 1 \rangle \tilde{\lambda}_1 + \sum_{l=0}^{j-1} \langle n-j n-l \rangle \tilde{\lambda}_{n-l} \right\}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Daraus ergibt sich

$$\boxed{(\tilde{\lambda}_{\hat{1}})_j = \frac{P_{2,n-j} |n-j \rangle}{\langle n-j 1 \rangle}}. \quad (4.35)$$

Aufbauend auf diesem Wissen ist man nun auch in der Lage die verbleibenden Spinoren in (4.32) explizit angeben:

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_{\widehat{n-(j-1)}} &= -\langle n-(j-1) 1 \rangle \frac{P_{2,n-j} |2 \rangle}{\langle 1 | P_{2,n-j} |2 \rangle} \\ (\lambda_{\hat{2}})_j &= \frac{P_{n-(j-1),2} P_{2,n-j} |1 \rangle}{\langle 1 | P_{2,n-j} |2 \rangle} \end{aligned}} \quad (4.36)$$

Es verbleibt nun noch die Berechnung von d_j . Hier brauchen wir nur die erarbeiteten Lösungen einsetzen und erhalten

$$\begin{aligned} v_j &= -\frac{\langle n-(j-1) 1 \rangle \langle 1 | P_{2,n-j} |2 \rangle}{P_{2,n-j}^2 \langle n-(j-1) | P_{2,n-j} |2 \rangle}, \\ h_l &= \frac{\langle 1 n-l \rangle}{\langle n-l n-(l-1) \rangle \langle 1 n-(l-1) \rangle}, \end{aligned} \quad (4.37)$$

woraus sich d_j einheitlich zu

$$\boxed{d_j = -\frac{\langle 1 | P_{2,n-j} |2 \rangle}{\langle n-(j-1) | P_{2,n-j} |2 \rangle} \times \frac{\langle n-(j-1) 1 \rangle^2}{P_{2,n-j}^2 F_{n-(j-1),1}}}. \quad (4.38)$$

formuliert.

¹für Einzelheiten des Bracketkalküls siehe Anhang C

4. Split Helicity Gluonamplituden

Damit bekommt (4.27) die explizite Form

$$A_{q,n-q} = - \sum_{j=1}^{n-(q+1)} \frac{\langle 1 | P_{2,n-j} | 2 \rangle}{F_{n-(j-1),1} P_{2,n-j}^2 \langle n-(j-1) | P_{2,n-j} | 2 \rangle} \quad (4.39)$$

$$\times \langle n-(j-1) 1 \rangle^2 A_{q-1,n-j-(q-1)} \left(\widehat{2}_j^-, \dots, n - \widehat{(j-1)}^+ \right).$$

Hier invertieren wir durch $b = n - (j - 1)$ zu guter Letzt die Summationsreihenfolge, so dass, mit einigen kosmetischen Veränderungen, der von uns gesuchte rekursive Zusammenhang

$$A_{q,n-q} = \sum_{b=q+2}^n \frac{\langle b 1 \rangle^2 \langle 1 | P_{2,b-1} | 2 \rangle}{F_{b,1} P_{b,1}^2 \langle b | P_{b,1} | 2 \rangle} A_{q-1,b-1-(q-1)} \left(\widehat{2}_{n-(b-1)}^-, \dots, \widehat{b}^+ \right) \quad (4.40)$$

lautet. Die zugehörigen, veränderten Impulse sind dabei bestimmt durch:

$$\begin{aligned} (\lambda_2)_{n-(b-1)} &= \frac{P_{3,b-1} P_{b,1} | 1 \rangle}{\langle 1 | P_{2,b-1} | 2 \rangle} & \lambda_{\hat{b}} &= -\langle b 1 \rangle \frac{P_{2,b-1} | 2 \rangle}{\langle 1 | P_{2,b-1} | 2 \rangle} \\ (\tilde{\lambda}_2)_{n-(b-1)} &= \tilde{\lambda}_2 & \tilde{\lambda}_{\hat{b}} &= -\frac{1}{\langle b 1 \rangle} P_{2,b-1} | 1 \rangle \end{aligned} \quad (4.41)$$

Mit diesem Ergebnis können wir nun beginnen die Richtigkeit der *MHV*-Lösung zu beweisen. Allerdings erfordert dies wegen der vorhandenen δ -Symbole eine sorgfältige Fallunterscheidung.

Häufig tauchen in den folgenden Rechnungen Produkte mit Impulssummen $P_{r,s}$ auf. Diese Impulssummen enthalten zwingend sowohl $P_{\hat{b}}$, als auch $(P_{\hat{2}})_{n-(b-1)}$, oder keinen von beiden. Dabei gilt im ersten Fall

$$\begin{aligned} X | P_{r,s} | Y &= X | P_r + \dots + P_{\hat{b}} + (P_{\hat{2}})_{n-(b-1)} + \dots + P_s | Y \\ &= X | P_r + \dots + P_{\hat{b}} + P_{\hat{b}+1} + \dots + P_n + P_1 + P_2 + \dots + P_s | Y, \end{aligned} \quad (4.42)$$

denn ¹

$$\begin{aligned}
 \langle X | P_{\hat{b}} + P_{\hat{2}} | Y \rangle &\stackrel{(4.41)}{=} - \frac{\langle X | P_{2,b-1} | 2 \rangle}{\langle 1 | P_{2,b-1} | 2 \rangle} \langle 1 | P_{2,b-1} | Y \rangle + \frac{\langle X | P_{3,b-1} P_{b,1} | 1 \rangle}{\langle 1 | P_{2,b-1} | 2 \rangle} [2 Y] \\
 &= \frac{\langle X | \lambda_{p_3,b-1} \rangle}{\langle 1 | P_{2,b-1} | 2 \rangle} \left(- [\tilde{\lambda}_{p_3,b-1} 2] \langle 1 | P_{2,b-1} | Y \rangle - [\tilde{\lambda}_{p_3,b-1} | P_{2,b-1} | 1] [2 Y] \right) \\
 &= \frac{\langle X | \lambda_{p_3,b-1} \rangle \langle \lambda_{p_2,b-1} 1 \rangle}{\langle 1 | P_{2,b-1} | 2 \rangle} \left([\tilde{\lambda}_{p_3,b-1} 2] [\tilde{\lambda}_{p_2,b-1} Y] + [\tilde{\lambda}_{p_3,b-1} \tilde{\lambda}_{p_2,b-1}] [Y 2] \right) \\
 &= \frac{\langle X | \lambda_{p_3,b-1} \rangle \langle \lambda_{p_2,b-1} 1 \rangle}{\langle 1 | P_{2,b-1} | 2 \rangle} \left(- [\tilde{\lambda}_{p_3,b-1} Y] [2 \tilde{\lambda}_{p_2,b-1}] \right) \\
 &= \langle X | P_{b,2} | Y \rangle .
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

4.5.2. Die Fälle $q \leq 3$

Ausgehend vom Induktionsanker $A_{0,n}$ bestehen erste Anwendungsmöglichkeiten von (4.40) bei

► $q = 1$:

Für den Fall $A_{1,n-1}$ kennen wir ja das Ergebnis schon aus Kapitel 3. Wenden wir die Vorschrift an, so werden Amplituden mit nur einem negativen Gluon auf eine Summe von Amplituden mit $q = 0$ abgebildet. Unter Verwendung des Induktionsankers folgt, dass jeder einzelne Summand gleich 0 ist und deshalb auch die gesamte Summe. Die *MHV*-Lösung reproduziert damit das bereits bekannte Ergebnis $A_{1,n-1} = 0$.

► $q = 2$:

Sowohl aus dem Induktionsbeweis der Parke Taylor Formel (s. Kapitel 3), wie auch aus dem ersten Abschnitt dieses Kapitels wissen wir, dass *MHV*-Amplituden unter der BCFW Rekursion wieder auf *MHV*-Amplituden abgebildet werden. Die Anwendung von (4.40) ist daher mit Vorsicht zu genießen. Insbesondere lohnt es sich einen genaueren Blick auf die Summe zu werfen. Eine zentrale Rolle kommt nämlich dem letzten Summanden zu, den wir für

¹Das die Impulssummen $P_{a,b}$ nicht auf dem Lichtkegel liegen und somit mehr als einen Eigenwert haben, ist für die Rechnung unerheblich.

4. Split Helicity Gluonamplituden

die folgende Diskussion explizit angeben:

$$\begin{aligned}
 A_{2,n-2} &= \sum_{b=5}^n \frac{\langle b\ 1 \rangle^2 \langle 1 | P_{2,b-1} | 2 \rangle}{F_{b,1} P_{b,1}^2 \langle b | P_{b,1} | 2 \rangle} A_{1,b-2} \left(\hat{2}_{n-(b-1)}^-, \dots, \hat{b}^+ \right) \\
 &\quad + \frac{\langle 4\ 1 \rangle^2 \langle 1 | P_{2,3} | 2 \rangle}{F_{4,1} P_{4,1}^2 \langle 4 | P_{4,1} | 2 \rangle} A_{1,2} \left(\hat{2}^-, 3^+, \hat{4}^+ \right)
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

Setzen wir nun die *MHV*-Lösung hier ein, so verschwinden gemäß den Überlegungen aus Abschnitt 3.3 alle Summanden bis auf den Letzten. Die *MHV*-Lösung selbst ist nämlich als Lösungsansatz für physikalische Amplituden konzipiert, während die BCFW Rekursion zwischenzeitlich auf komplexe Impulse zurückgreift. Beides zusammen kann natürlich nicht harmonieren und so behandelt die *MHV*-Lösung die komplexifizierte Amplitude $A_{1,2} \left(\hat{2}^-, 3^+, \hat{4}^+ \right)$ auch nicht als \overline{MHV} Amplitude. Korrigieren wir dies per Hand, so ergibt sich die übliche Struktur

$$A_{1,2} = \frac{[3\hat{4}]^3}{[\hat{2}\ 3][\hat{4}\hat{2}]} . \tag{4.45}$$

Aus (4.41) folgt weiter, dass

$$\begin{aligned}
 [\hat{2}\ 3] &= [2\ 3] , \\
 [3\hat{4}] &= -\frac{[3 | P_{2,3} | 1 \rangle}{\langle 4\ 1 \rangle} = \frac{[3\ 2] \langle 1\ 2 \rangle}{\langle 4\ 1 \rangle} , \\
 [\hat{4}\hat{2}] &= \frac{\langle 1 | P_{2,3} | 2 \rangle}{\langle 4\ 1 \rangle} ,
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

und deshalb ist

$$\begin{aligned}
 A_{2,n-2} &= \frac{\langle 4\ 1 \rangle^2 \langle 1 | P_{2,3} | 2 \rangle}{F_{4,1} P_{4,1}^2 \langle 4 | P_{4,1} | 2 \rangle} \times \frac{\langle 1\ 2 \rangle^3 [3\ 2]^3 \langle 4\ 1 \rangle}{\langle 4\ 1 \rangle^3 [2\ 3] \langle 1 | P_{2,3} | 2 \rangle} \\
 &= \frac{\langle 1\ 2 \rangle^3 [3\ 2]^2}{F_{4,1} P_{2,3}^2 \langle 4 | P_{2,3} | 2 \rangle} \\
 &= \frac{\langle 1\ 2 \rangle^3}{F_{2,1}} \equiv \frac{\langle q-1\ q \rangle^3}{F_{q,q-1}} .
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

Diese Zerlegung steht übrigens in voller Übereinstimmung mit Kapitel 3. Würde man dort die Rekursion immer wieder durchführen, fiele man schließlich auf

die Amplitude $A(\hat{1}^-, 2^-, 3^+, \hat{4}^+)$ zurück. Deren Zerlegung ist aber gerade

$$A(\hat{1}^-, 2^-, 3^+, \hat{4}^+) = A(\hat{1}^-, 2^-, -\hat{P}_{1,2}^+) A(\hat{P}_{1,2}^-, 3^+, \hat{4}^+),$$

was die Anwendung von (4.40) im Nachhinein rechtfertigt und somit die Konsistenz der Rechnung für den eingeführten Erweiterungsterm E belegt.

► $q = 3$:

Auch der Fall der \overline{NMHV} Split Helicity Amplituden bedarf einer separaten Behandlung, da hier der Faktor $\delta_{q,3}$ in D_2 zum Tragen kommt. Darüber hinaus führt (4.40) diesen Amplitudentyp auf MHV -Amplituden zurück, so dass nur der Erweiterungsterm E beiträgt:

$$\begin{aligned} A_{3,n-3} &= \sum_{b=5}^n \frac{\langle b\ 1 \rangle^2 \langle 1|P_{2,b-1}|2\rangle}{F_{b,1} P_{b,1}^2 \langle b|P_{b,1}|2\rangle} A_{2,b-3}(\hat{2}_{n-(b-1)}^-, \dots, \hat{b}^+) \\ &= \sum_{b=5}^n \frac{\langle b\ 1 \rangle^2 \langle 1|P_{2,b-1}|2\rangle}{F_{b,1} P_{b,1}^2 \langle b|P_{b,1}|2\rangle} \times \frac{\langle \hat{2}\ 3 \rangle^3}{\langle 34 \rangle \dots \langle b-1\ \hat{b} \rangle \langle \hat{b}\ \hat{2} \rangle} \end{aligned} \quad (4.48)$$

Mit Hilfe der allgemeinen Lösung (4.41) finden wir

$$\langle \hat{2}\ 3 \rangle = \frac{\langle 1|P_{b,1}P_{3,b-1}|3\rangle}{\langle 1|P_{2,b-1}|2\rangle} = \frac{\langle 1|P_{2,b-1}P_{b,2}|3\rangle}{\langle 1|P_{2,b-1}|2\rangle}, \quad (4.49)$$

$$\langle b-1\ \hat{b} \rangle = -\langle b\ 1 \rangle \frac{\langle b-1|P_{2,b-1}|2\rangle}{\langle 1|P_{2,b-1}|2\rangle} = \frac{\langle b\ 1 \rangle \langle b-1|P_{b,2}|2\rangle}{\langle 1|P_{2,b-1}|2\rangle}, \quad (4.50)$$

$$\langle \hat{b}\ \hat{2} \rangle = \frac{\langle b\ 1 \rangle [2|P_{2,b-1}P_{3,b-1}P_{b,1}|1\rangle}{\langle 1|P_{2,b-1}|2\rangle^2}, \quad (4.51)$$

$$\stackrel{(C.10)}{=} -P_{3,b-1}^2 \frac{\langle b\ 1 \rangle \langle 1|P_{2,b-1}|2\rangle}{\langle 1|P_{2,b-1}|2\rangle^2}.$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\begin{aligned} A_{3,n-3} &= \sum_{b=5}^n \frac{\langle b\ 1 \rangle^2 \langle 1|P_{2,b-1}|2\rangle}{F_{b,1} P_{b,1}^2 [2|P_{2,b-1}|b\rangle} \\ &\quad \times \frac{\langle 1|P_{2,b-1}P_{b,2}|3\rangle^3 \langle 1|P_{2,b-1}|2\rangle^3}{F_{3,b-1} P_{b,2}^2 \langle b\ 1 \rangle^2 \langle b-1|P_{b,2}|2\rangle \langle 1|P_{2,b-1}|2\rangle^3} \\ &= \sum_{b=5}^n \frac{\langle 1|P_{2,b-1}P_{b,2}|3\rangle^3 \langle b-1\ b \rangle}{F_{3,1} P_{2,b-1}^2 P_{b,2}^2 [2|P_{2,b-1}|b\rangle \langle b-1|P_{b,2}|2\rangle}, \end{aligned} \quad (4.52)$$

was zusammen mit $b \mapsto j-1$ exakt dem Ergebnis in {13} entspricht.

4.5.3. Der Bereich $3 < q < n - 1$

Wenden wir uns nun dem Hauptteil des Induktionsschrittes zu. Entsprechend der Struktur des rekursiven Zusammenhangs (4.40) müssen wir dabei in diesem Regime zwei grundsätzliche Fälle, $b_1 = b - 1$ und $b_1 < b$, unterscheiden.

► $b_1 = b - 1$:

Nimmt b_1 den größtmöglichen Wert an, kommt es zu zahlreichen Veränderungen in den einzelnen Faktoren von (4.40). Die einzigen nicht sofort einsichtigen Beiträge stammen hierbei von

$$\langle b - 1 \hat{b} \rangle = -\langle b 1 \rangle \frac{\langle b - 1 | P_{2,b-1} | 2 \rangle}{\langle 1 | P_{2,b-1} | 2 \rangle} \quad (4.53)$$

und

$$\begin{aligned} \langle \hat{b} \hat{2} \rangle &= \langle b 1 \rangle \frac{[2 | P_{2,b-1} P_{3,b-1} P_{b,1} | 1 \rangle}{\langle 1 | P_{2,b-1} | 2 \rangle^2} \\ &\stackrel{(C.10)}{=} -\langle b 1 \rangle P_{3,b-1}^2 \frac{[2 | P_{b,1} | 1 \rangle}{\langle 1 | P_{2,b-1} | 2 \rangle^2}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Folglich enthält ein Zickzackdiagramm von diesem Typ als analytische Beiträge:

$$\begin{aligned} N_1 &= \langle \hat{2} | P_{3,b-1} P_{b,a_1} \cdots P_{b_{k+1}+1, q-1} | q \rangle^3 \\ &\stackrel{(C.10)}{=} \left[\frac{P_{3,b-1}^2}{\langle 1 | P_{2,b-1} | 2 \rangle} \right]^3 \langle 1 | P_{2,b-1} P_{b,a_1} \cdots P_{b_{k+1}+1, q-1} | q \rangle^3 \\ N_2 &= \langle \hat{b} b - 1 \rangle \langle b_2 + 1 b_2 \rangle \cdots \langle b_{k+1} + 1 b_{k+1} \rangle \\ &= - \left[\frac{\langle b 1 \rangle \langle b - 1 | P_{2,b-1} | 2 \rangle}{\langle b - 1 b \rangle \langle 1 | P_{2,b-1} | 2 \rangle} \right] \langle b b - 1 \rangle \langle b_2 + 1 b_2 \rangle \cdots \langle b_{k+1} + 1 b_{k+1} \rangle \\ N_3 &= [a_1 a_1 + 1] \cdots [a_k a_k + 1] \end{aligned} \quad (4.55)$$

sowie

$$\begin{aligned}
 D_1 &= P_{3,b-1}^2 P_{b,a_1}^2 \cdots P_{a_k+1,b_{k+1}}^2 P_{b_{k+1}+1,q-1}^2 \\
 &= \left[\frac{P_{3,b-1}^2}{P_{2,b-1}^2} \right] P_{2,b-1}^2 P_{b,a_1}^2 \cdots P_{a_k+1,b_{k+1}}^2 P_{b_{k+1}+1,q-1}^2 \\
 D_2 &= F_{q,\hat{2}} \{ \delta_{q,3} (1 - \bar{F}_{3,q-1}) + \bar{F}_{3,q-1} \} \\
 &= - \left[\frac{\langle b1 \rangle^2 P_{3,b-1}^2}{F_{b-1,1} [23]} \frac{\langle b-1 | P_{2,b-1} | 2 \rangle}{\langle 1 | P_{2,b-1} | 2 \rangle^2} \right] F_{q,1} \{ \delta_{q,3} (1 - \bar{F}_{2,q-1}) + \bar{F}_{2,q-1} \} \\
 D_3 &= [3 | P_{3,b-1} | \hat{b} \rangle \times \langle b-1 | P_{b,a_1} | a_1 \rangle \times \cdots \times \langle b_{k+1} | P_{b_{k+1}+1,q-1} | q-1 \rangle \\
 &\stackrel{(C.10)}{=} - \left[\frac{P_{3,b-1}^2 [23] \langle b1 \rangle}{[2 | P_{2,b-1} | b \rangle \langle 1 | P_{2,b-1} | 2 \rangle} \right] [2 | P_{2,b-1} | b \rangle \times \langle b-1 | P_{b,a_1} | a_1 \rangle \times \\
 &\quad \cdots \times \langle b_{k+1} | P_{b_{k+1}+1,q-1} | q-1 \rangle
 \end{aligned} \tag{4.56}$$

Offensichtlich sind darin schon die Terme für ein analoges Zickzackdiagramm von $A_{q,n}$ enthalten. Fassen wir die störenden Zusatzfaktoren in den **eckigen Klammern** zusammen, so ergibt sich

$$\left[\cdots \right] = - \frac{F_{b,1} P_{2,b-1}^2 [2 | P_{2,b-1} | b \rangle}{\langle b1 \rangle^2 \langle 1 | P_{2,b-1} | 2 \rangle} = \frac{F_{b,1} P_{b,1}^2 \langle b | P_{b,1} | 2 \rangle}{\langle b1 \rangle^2 \langle 1 | P_{2,b-1} | 2 \rangle}, \tag{4.57}$$

was gerade dem Inversen des Vorfaktors in (4.40) entspricht. D.h. diese Zickzackdiagramme rechter Hand in (4.40) korrespondieren mit gleich langen Diagrammen auf der linken Seite der Gleichung.

► $b_1 < b - 1$:

Hier ist es äußerst geschickt zunächst einmal die Auswirkung auf den Faktor N_1 zu untersuchen.

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \langle \hat{2} | P_{3,b_1} P_{b_1+1,a_1} \cdots P_{b_{k+1}+1,q-1} | q \rangle^3 \\
 &= \left[\frac{1}{\langle 1 | P_{2,b-1} | 2 \rangle^3} \right] \langle 1 | P_{2,b-1} P_{b,2} P_{3,b_1} P_{b_1+1,a_1} \cdots P_{b_{k+1}+1,q-1} | q \rangle^3
 \end{aligned} \tag{4.58}$$

Vergleichen wir beide Zeilen, so stellen wir fest das der Term in spitzen Klammern um zwei Impulsfaktoren gewachsen ist, die gerade einem zusätzlichen Zickzack entsprechen. Darauf aufbauend, manipuliert man nun auch alle anderen Faktoren zielgerichtet. In (4.59) ist das Ergebnis dieser Bemühungen

4. Split Helicity Gluonamplituden

zu finden. Unpassende Terme sind dabei erneut durch *eckigen Klammern* eingefasst.

$$\begin{aligned}
N_2 &= \langle b_1 + 1 \ b_1 \rangle \langle b_2 + 1 \ b_2 \rangle \cdots \langle b_{k+1} + 1 \ b_{k+1} \rangle \\
&= - \left[\frac{1}{\langle b-1 \ b \rangle} \right] \langle b \ b-1 \rangle \langle b_1 + 1 \ b_1 \rangle \langle b_2 + 1 \ b_2 \rangle \cdots \langle b_{k+1} + 1 \ b_{k+1} \rangle \\
N_3 &= [a_1 \ a_1 + 1] \cdots [a_k \ a_k + 1] = \left[\frac{1}{[2 \ 3]} \right] [2 \ 3] [a_1 \ a_1 + 1] \cdots [a_k \ a_k + 1] \\
D_1 &= P_{3,b_1}^2 P_{b_1+1, a_1}^2 \cdots P_{a_k+1, b_{k+1}}^2 P_{b_{k+1}+1, q-1}^2 \\
&= \left[\frac{1}{P_{2,b-1}^2 P_{b,2}^2} \right] P_{2,b-1}^2 P_{b,2}^2 P_{3,b_1}^2 P_{b_1+1, a_1}^2 \cdots P_{a_k+1, b_{k+1}}^2 P_{b_{k+1}+1, q-1}^2 \\
D_2 &= F_{q,2} \{ \delta_{q,3} (1 - \bar{F}_{3,q-1}) + \bar{F}_{3,q-1} \} \\
&= - \left[\frac{\langle b \ 1 \rangle^2 P_{3,b-1}^2}{F_{b-1,1} [2 \ 3]} \frac{\langle b-1 \ | \ P_{2,b-1} \ | \ 2 \rangle}{\langle 1 \ | \ P_{2,b-1} \ | \ 2 \rangle^2} \right] F_{q,1} \{ \delta_{q,3} (1 - \bar{F}_{2,q-1}) + \bar{F}_{2,q-1} \} \\
D_3 &= [3 \ | \ P_{3,b_1} \ | \ b_1 + 1 \rangle \times \langle b_1 \ | \ P_{b_1+1, a_1} \ | \ a_1 \rangle \times \cdots \times \langle b_{k+1} \ | \ P_{b_{k+1}+1, q-1} \ | \ q-1 \rangle \\
&= \left[\frac{1}{[2 \ | \ P_{2,b-1} \ | \ b \rangle \langle b-1 \ | \ P_{b,2} \ | \ 2 \rangle]} \right] [2 \ | \ P_{2,b-1} \ | \ b \rangle \times \langle b-1 \ | \ P_{b,2} \ | \ 2 \rangle \times \\
&\quad [3 \ | \ P_{3,b_1} \ | \ b_1 + 1 \rangle \times \langle b_1 \ | \ P_{b_1+1, a_1} \ | \ a_1 \rangle \times \cdots \times \langle b_{k+1} \ | \ P_{b_{k+1}+1, q-1} \ | \ q-1 \rangle \\
&\hspace{20em} (4.59)
\end{aligned}$$

Verrechnen wir die störenden Terme, erhalten wir abermals

$$\left[\cdots \right] = - \frac{F_{b,1} P_{2,b-1}^2 [2 \ | \ P_{2,b-1} \ | \ b \rangle}{\langle b \ 1 \rangle^2 \langle 1 \ | \ P_{2,b-1} \ | \ 2 \rangle} = \frac{F_{b,1} P_{b,1}^2 \langle b \ | \ P_{b,1} \ | \ 2 \rangle}{\langle b \ 1 \rangle^2 \langle 1 \ | \ P_{2,b-1} \ | \ 2 \rangle}, \quad (4.60)$$

also gerade das Inverse des Vorfaktors im rekursiven Zusammenhang (4.40). Damit korrelieren Zickzackdiagramme mit $b_1 < b-1$ rechter Hand von (4.40), mit Diagrammen auf der linken Seite, welche gerade eine Zickzacklinie mehr besitzen.

Es verbleibt nun noch zu zeigen, dass auf diese Weise alle möglichen Zickzackdiagramme linker Hand von (4.40) gewonnen werden. Einen wichtigen Anhaltspunkt liefert die zu beobachtende Reversibilität aller vorgeführten Rechenschritte. Tatsächlich können wir jedem Diagramm, das auf der linken Seite zu $A_{q,n-q}$ beiträgt, ein Zickzackdiagramm auf der rechten Seite zuordnen, d.h. *die obige Abbildung ist bijektiv*. Entscheidend bei der Umkehrabbildung ist der Wert von a_1 . Gilt $a_1 > 2$ so wird das Zickzackdiagramm auf ein gleichlanges rechter Hand abgebildet, im Fall $a_1 = 2$ wird

der erste Zickzack hingegen abgeschnitten.

4.5.4. Die Fälle $q > n - 1$

Der Beweis dieser beiden Split Helicity Typen ist streng genommen nur ein Konsistenzcheck, denn schon in der Ableitung des rekursiven Zusammenhangs haben wir massiv von unserem Vorwissen $A_{n-1,1} = 0 = A_{n,0}$ Gebrauch gemacht. Wie schon im ersten Kapitel dieses Abschnittes bemerkt, bilden diese Amplituden jeweils geschlossene Unterklassen, so dass auch $A_{q-1,b}$ vom zugehörigen Typ sind. Die Anwendung der MHV -Lösung ergibt so natürlicherweise Null.

4.6. Induktionsbeweis der \overline{MHV} -Lösung

Aufgrund des in Kapitel 4.4 vorgestellten Zusammenhangs zwischen MHV - und \overline{MHV} -Lösung ändern sich Beweisidee und Beweisstruktur nur geringfügig. So ist die Beweisführung gegenüber dem vorherigen Abschnitt in eine *Induktion in $n - q$* abzuändern. Dementsprechend werden jetzt sukzessive alle Gluonen mit negativer Helizität abgespalten, bis wir schließlich $q = 2$ erreichen. Wir behalten also in jedem Rekursionsschritt den zweiten Term bei und unterwerfen den ersten nochmals der BCFW Rekursionsformel. Aus dem veränderten Rekursionsvorgehen ergeben sich dann folgende Veränderungen bei den zu manipulierenden Spinoren:

$$\widehat{2} \rightarrow \widehat{n-1}, \quad \wedge \quad \widehat{n-j} \rightarrow \widehat{j}, \quad \wedge \quad \widehat{1} \rightarrow \widehat{n}$$

Mit Hilfe der alten Spinorlösungen (und etwas Übung) errät man schnell die Lösungen dieser Spinoren zu:

$$\begin{aligned} (\lambda_{\widehat{n}})_j &= \frac{P_{j+1, n-1} |j+1\rangle}{[j+1 \ n]} \\ \lambda_j &= -\frac{P_{j+1, n-1} |n\rangle}{[j \ n]} \\ \widetilde{\lambda}_j &= -[j \ n] \frac{P_{j+1, n-1} |n-1\rangle}{\langle n-1 | P_{j+1, n-1} |n\rangle} \\ (\widetilde{\lambda}_{\widehat{n-1}})_j &= \frac{P_{n-1, j} P_{j+1, n-1} |n\rangle}{\langle n-1 | P_{j+1, n-1} |n\rangle} \end{aligned} \tag{4.61}$$

Daraus wiederum errechnen sich die notwendigen Terme für den Vorfaktor:

$$\begin{aligned}\bar{d}_j &= \left[(1 - \delta_{1,j}) \prod_{l=1}^{j-1} \bar{v}_l + \delta_{1,j} \right] \bar{h}_j \\ \bar{v}_l &= P_{\hat{l}, l+1}^2 A \left(\hat{l}^-, (l+1)^-, -\hat{P}_{\hat{l}, l+1}^+ \right) = \frac{[\hat{n}_l l + 1]}{[\hat{n}_l l][l l + 1]} \\ &= \frac{[n l + 1]}{[n l][l l + 1]},\end{aligned}\tag{4.62}$$

$$\begin{aligned}\bar{h}_j &= P_{n-1, \hat{n}_j}^2 A \left(\hat{P}_{n-1, n_j}^-, (n-1)^+, n_j^+ \right) = \frac{\langle n-1 \hat{j} \rangle}{\langle n-1 \hat{n}_{j-1} \rangle \langle \hat{n}_{j-1} \hat{j} \rangle} \\ &= \frac{\langle n-1 | P_{j+1, n-1} | n \rangle [j n]}{P_{j+1, n-1}^2 \langle n-1 | P_{j, n-1} | j \rangle}, \\ \Rightarrow \bar{d}_j &= - \frac{\langle n-1 | P_{j+1, n-1} | n \rangle [j n]^2}{P_{j+1, n-1}^2 \bar{F}_{n,j} \langle n-1 | P_{j, n-1} | j \rangle}\end{aligned}\tag{4.63}$$

Der rekursive Zusammenhang ist deshalb gegeben durch

$$A_{q, n-q} = - \sum_{j=1}^{q-1} \frac{\langle n-1 | P_{j+1, n-1} | n \rangle [j n]^2}{P_{j+1, n-1}^2 \bar{F}_{n,j} \langle n-1 | P_{j, n-1} | j \rangle} \times A \left(\hat{j}^-, \dots, q^-, (q+1)^+, \dots, \widehat{n-1}_j^+ \right).\tag{4.64}$$

Genau wie im vorherigen Fall können wir auch hier die Summationsreihenfolge invertieren. Dazu setze man $a = q - j \Leftrightarrow j = q - a$, wodurch wir

$$\begin{aligned}A_{q, n-q} &= - \sum_{a=1}^{q-1} \frac{\langle n-1 | P_{q-(a-1), n-1} | n \rangle [q - a n]^2}{P_{q-a, n-1}^2 \bar{F}_{n, q-a} \langle n-1 | P_{q-a, n-1} | q - a \rangle} \\ &\quad \times A \left(\widehat{q-a}^-, \dots, q^-, (q+1)^+, \dots, \widehat{n-1}_{q-a} \right)\end{aligned}\tag{4.65}$$

als die zentrale Formel erhalten.

Hierin bedeuten

$$\begin{aligned}
 (\lambda_{\hat{n}})_{q-a} &= \frac{P_{q-(a-1), n-1} | q - (a-1)]}{[q - (a-1) n]} \\
 \lambda_{\widehat{q-a}} &= -\frac{P_{q-(a-1), n-1} | n]}{[q - a n]} \\
 \tilde{\lambda}_{\widehat{q-a}} &= -[q - a n] \frac{P_{q-(a-1), n-1} | n - 1 \rangle}{\langle n - 1 | P_{q-(a-1), n-1} | n]} \\
 (\tilde{\lambda}_{\widehat{n-1}})_{q-a} &= \frac{P_{n-1, q-(a-1)} P_{q-(a-1), n-1} | n]}{\langle n - 1 | P_{q-(a-1), n-1} | n]}
 \end{aligned} \tag{4.66}$$

Analog zum Beweis der MHV-Lösung ist nun eine Fallunterscheidung für $n - q < 3$, $3 < n - q < n - 1$ sowie $n - q = 1$ vorzunehmen. Wir verzichten jedoch an dieser Stelle auf die explizite Ausarbeitung der Einzelheiten und wollen stattdessen die vorgestellten Techniken erweitern, um Entstehung und Struktur beider Lösungen aufzuklären.

4.7. Konstruktion der MHV-Lösung

Den Ausgangspunkt unserer Überlegungen bildet die Beobachtung aus Gleichung (4.7). Danach ist die MHV-Lösung strukturell einer Summe von MHV Amplituden ähnlich. Zur Aufklärung des Sachverhaltes können wir nun den zentralen technische Aspekt des Induktionsbeweises:

$$A_{q, n-q} \rightarrow A_{q-1, x}$$

verwenden. Es gilt nämlich:

Feststellung 4.3. *Das beschriebene Verfahren, Amplituden mit q Gluonen negativer Helizität rekursiv auf Amplituden mit $q - 1$ solcher Gluonen abzubilden, kann solange wiederholt werden bis $q - 1 = 2$. Dann erfolgt aber gerade eine vollständige Zerlegung nach MHV-Amplituden!*

Konsequenz 4.1. *Da MHV Amplituden eine geschlossene Klasse unter der BCFW Rekursion bilden, ist es nicht möglich sie mit obiger Methode zu berechnen. Der Term E in (4.4) muß also per Hand hinzugefügt werden!*

Konsequenz 4.2. *Die Verwendung der BCFW Rekursion, im Zusammenhang mit dem vorgeschlagenen Verfahren, führt bei Split Helicity Amplituden zu einer Zerlegung die in Analogie zum Vorgehen beim CSW Zugang steht. Es besteht jedoch ein wesentlicher Unterschied in der technischen Realisierung.*

4. Split Helicity Gluonamplituden

Zugleich bildet dieses Vorgehen einen rechnerischen Beleg für Konsequenz 3.4.

Beginnen wir also damit die notwendigen technischen Einzelheiten auszuarbeiten. Dazu überlegen wir zunächst was passiert, wenn die Rekursion $q \rightarrow q - 1$ nun auf einen einzelnen Summanden aus dem ersten Schritt wirkt. Offensichtlich ist

$$A\left(\widehat{2}_{l_1}^-, \dots, \widehat{n-l_1}^+\right) = \sum_{l_2=0}^{n-(q+2)-l_1} d_{l_2} A\left(\widehat{3}_{l_1, l_2}^-, \dots, \widehat{n-l_1-l_2}^+\right), \quad (4.67)$$

wenn $l_i = j_i - 1$ gilt. Mit dieser Konvention erhalten wir bei zweifacher Rekursion

$$A_{q, n-q} = \sum_{l_2}^{n-(q+2)-l_1} \sum_{l_1=0}^{n-q-2} d_{l_1} \times d_{l_2} A\left(\widehat{3}_{l_1, l_2}^-, \dots, \widehat{n-l_1-l_2}^+\right). \quad (4.68)$$

Die Gesamtzahl der Summanden wächst somit an auf

$$[n - (q + 2) + 1] + [n - (q + 2)] + \dots + 1 \stackrel{\text{Gauß}}{=} \frac{1}{2} [n - q][n - (q + 1)]. \quad (4.69)$$

Bei k -facher Rekursion können wir das Ergebnis unserer Zerlegung entsprechend verallgemeinern zu:

$$A_{q, n-q} = \sum_{l_1} \cdots \sum_{l_k} \left(\prod_{i=1}^k d_{l_i} \right) A\left(\widehat{k+1}_{l_1, \dots, l_k}^-, \dots, q^-, \dots, \widehat{n-L_k}^+\right) \quad (4.70)$$

Für die Größe L_k gilt:

$$L_k = \sum_{i=1}^k l_i \quad (4.71)$$

Feststellung 4.4. *Setzt man in (4.70) $k + 1 = q - 1$, erhält man eine konstruktive Zerlegung von Split Helicity Amplituden in MHV-Amplituden!*

Das beschriebene Verfahren führt zu einem explosionsartigem Anstieg bei der Gesamtzahl der Summanden. Es stellen sich also die Fragen

- ◇ ob und wie die Summanden geschickt zusammengefasst werden können und
- ◇ wie viele Summanden es insgesamt gibt.

Ordnung der Summanden nach ihrer Gesamtgluonenzahl

Der nächstliegende Gedanke ist eine Ordnung nach Gesamtgluonenzahl, schließlich tritt diese ja im Nenner der *MHV*-Formel auf. Dabei ist aber zu beachten, dass es mehrere Amplitudenbeiträge mit gleicher Gluonenzahl gibt. Wir wollen im Folgenden deren Entstehung und Anzahl besprechen.

Jeder Summand rechter Hand von (4.70) entsteht durch k -fache Abspaltung einer Amplitude vom Typ $A_{2,1}$ sowie einer variablen Anzahl vom Typ $A_{1,2}$. Bei Summanden mit gleicher Gluonenanzahl ist zusätzlich letztere Zahl, bezeichnen wir sie mit p , gleich. Was aber nicht identisch ist, ist die Reihenfolge in der abgespalten wird. Einzig im letzten Schritt erfolgt immer eine Abspaltung einer Amplitude vom Typ $A_{2,1}$. Wir haben daher insgesamt $k - 1 + p$ unterschiedliche Elemente, für die wir die Anzahl der Möglichkeiten suchen, l von ihnen ohne Beachtung der Reihenfolge (und ohne Wiederholung) auszuwählen. Gemäß den Regeln der Kombinatorik gilt dann

$$C_n^k = \binom{k-1+p}{p} = \frac{(k-1+p)!}{(k-1)! p!} \quad (4.72)$$

In unserem Fall ($k+1 = q-1$) würde man daher das Ergebnis umformulieren zu:

$$A_{q,n-q} = \sum_{p=0}^{n-(q+2)} \sum_{r=1}^{\rho_p} d_{p,r} A \left(\widehat{q-1}_r^-, q^-, q+1^+, \dots, \widehat{n-p}_r^+ \right) \quad (4.73)$$

mit

$$\rho_p = \frac{(q-3+p)!}{(q-3)! p!}.$$

Es zeigt sich nun jedoch, dass diese Formulierung nicht zur *MHV*-Lösung korrespondiert. Wir können hieraus aber ablesen, wie viele Summanden es insgesamt gibt:

$$\boxed{\text{Anzahl aller Summanden} = \sum_{p=0}^{n-(q+2)} \binom{p+(q-3)}{p} \stackrel{q \neq 2}{=} \binom{n-4}{q-2}} \quad (4.74)$$

Von der Richtigkeit dieses Ergebnisses kann man sich leicht in einfachen Fällen wie $q = 3, 4$ oder $q = n - 2$ selbst überzeugen.

Ordnung der Summanden nach nicht verschwindenden Indizes l_j

Um nun zu sehen wie die vorgestellte Zerlegung mit der *MHV*-Lösung zusammenhängt, richten wir unser Augenmerk auf die manipulierten Spinoren. In Analogie zu unseren

4. Split Helicity Gluonamplituden

Überlegungen oben ist ihre rekursive Lösung gegeben durch:

$$\boxed{\begin{aligned} (\widehat{\lambda_{k+1}})_{l_1, \dots, l_k} &= \frac{P_{n-L_k, k+1} P_{k+1, n-(L_k+1)} |\widehat{k}_{l_1, \dots, l_{k-1}}\rangle}{\langle \widehat{k}_{l_1, \dots, l_{k-1}} | P_{k+1, n-(L_k+1)} | k+1 \rangle} \\ (\widehat{\lambda_{n-L_k}})_{l_1, \dots, l_k} &= -\langle n-L_k \widehat{k}_{l_1, \dots, l_{k-1}} \rangle \frac{P_{k+1, n-(L_k+1)} | k+1 \rangle}{\langle \widehat{k}_{l_1, \dots, l_{k-1}} | P_{k+1, n-(L_{k-1}+1)} | k+1 \rangle}. \end{aligned}} \quad (4.75)$$

Dabei gilt wie zuvor $\lambda_{\hat{1}} = \lambda_1$.

Iterieren wir den Nenner der ersten Gleichung nochmal, so ergibt sich

$$\begin{aligned} (\widehat{\lambda_{k+1}})_{l_1, \dots, l_k} &= \frac{P_{n-L_k, k+1} P_{k+1, n-(L_k+1)} P_{n-L_{k-1}, k} P_{k, n-(L_{k-1}+1)} |\widehat{k-1}_{l_1, \dots, l_{k-2}}\rangle}{\langle \widehat{k} | P_{k+1, n-(L_k+1)} | k+1 \rangle \langle \widehat{k-1} | P_{k, n-(L_{k-1}+1)} | k \rangle} \\ &= -\frac{P_{n-L_k, k+1} P_{n-L_k, k} P_{n-L_{k-1}, k} P_{k, n-(L_{k-1}+1)} |\widehat{k-1}_{l_1, \dots, l_{k-2}}\rangle}{\langle \widehat{k} | P_{k+1, n-(L_k+1)} | k+1 \rangle \langle \widehat{k-1} | P_{k, n-(L_{k-1}+1)} | k \rangle}, \end{aligned} \quad (4.76)$$

d.h. für alle Summanden mit $l_k = 0$, $k > 1$ kontrahiert die Spinorlösung zu

$$(\widehat{\lambda_{k+1}})_{l_1, \dots, l_{k-1}} \stackrel{(C.10)}{=} P_{n-L_{k-1}, k}^2 \frac{P_{n-L_{k-1}, k+1} P_{n-L_{k-1}, k-1} |\widehat{k-1}_{l_1, \dots, l_{k-2}}\rangle}{\langle \widehat{k} | P_{k+1, n-(L_k+1)} | k+1 \rangle \langle \widehat{k-1} | P_{k, n-(L_{k-1}+1)} | k \rangle}. \quad (4.77)$$

Feststellung 4.5. Eine Kontraktion der Spinorlösung ist bei jedem Index $l_j \neq l_1$ möglich. Unter den Zählertermen

$$\langle \widehat{q-1}_{l_1, \dots, l_{q-2}} q \rangle^3 = \langle 1 | P_{2, n-(l_1+1)} P_{n-l_1, 2} P_{3, n-(l_2+1)} P_{n-l_2, 3} \cdots \cdots P_{q-1, n-(L_{q-2})} P_{n-(L_{q-2}+1), q-1} | q \rangle^3 \quad (4.78)$$

der MHV Amplituden existieren daher Gruppen mit gleichlangen Zwischentermen. Ihre Länge ist abhängig von der Anzahl verschwindender Indizes l_j .

Im Hinblick auf die MHV-Lösung gilt also

Konsequenz 4.3. Sei k der Parameter aus der MHV-Lösung, dann gibt k an wie viele der Indizes l_j (mit $j > 1$) nicht Null sind. Der Maximalwert von k wird bestimmt durch die Länge des kleineren der beiden Helizitätsblöcke, da die Rekursion immer abbricht, sobald entweder $q = 2$ oder $n - q = 2$ erreicht wird.

Alle weiteren Terme der MHV-Lösung entstehen unter Mitwirkung der Vorfaktoren d_{l_j} . Wie schon bei der Spinorlösung geben wir nur eine rekursive Lösung an, die direkt aus den Ergebnissen des Induktionsbeweises zu abstrahieren ist. Bezüglich der Abhängigkeit ist der Übersichtlichkeit halber nur der höchste Index angeführt.

$$\begin{aligned}
 d_{l_k} &= v_{l_k} \left[\delta_{0, l_k} + (1 - \delta_{0, l_k}) \prod_{r=1}^{l_k} h_r \right] \\
 v_{l_k} &= - \frac{\langle n - L_k \hat{k}_{l_{k-1}} \rangle \langle \hat{k}_{l_{k-1}} | P_{k+1, n-(L_k+1)} | k+1 \rangle}{P_{k+1, n-(L_k+1)}^2 \langle n - L_k | P_{k+1, n-(L_k+1)} | k+1 \rangle} \\
 h_r &= \frac{\langle \hat{k}_{l_{k-1}} n - L_{k-1} - r \rangle}{\langle n - L_{k-1} - r \ n - L_{k-1} - (r-1) \rangle \langle \hat{k}_{l_{k-1}} n - L_{k-1} - (r-1) \rangle}
 \end{aligned} \tag{4.79}$$

$$\Rightarrow \prod_{r=1}^{l_k} h_r = \frac{\langle n - L_k \hat{k}_{l_{k-1}} \rangle}{F_{n-L_k, n-(L_{k-1}+1)} \langle n - (L_{k-1}+1) \widehat{n - L_{k-1}} \rangle \langle \widehat{n - L_{k-1}} \hat{k}_{l_{k-1}} \rangle} \tag{4.80}$$

Damit erhalten wir (alles für $k \neq 1$):

$$\begin{aligned}
 d_{l_k} &= -\delta_{0, l_k} \frac{\langle n - L_k \hat{k}_{l_{k-1}} \rangle \langle \hat{k}_{l_{k-1}} | P_{k+1, n-(L_k+1)} | k+1 \rangle}{P_{k+1, n-(L_k+1)}^2 \langle n - L_k | P_{k+1, n-(L_k+1)} | k+1 \rangle} \\
 &\quad - (1 - \delta_{0, l_k}) \frac{\langle n - L_k \hat{k}_{l_{k-1}} \rangle^2}{\langle n - (L_{k-1}+1) \widehat{n - L_{k-1}} \rangle \langle \widehat{n - L_{k-1}} \hat{k}_{l_{k-1}} \rangle} \\
 &\quad \times \frac{1}{P_{k+1, n-(L_k+1)}^2 F_{n-L_k, n-(L_{k-1}+1)}} \times \frac{\langle \hat{k}_{l_{k-1}} | P_{k+1, n-(L_k+1)} | k+1 \rangle}{\langle n - L_k | P_{k+1, n-(L_k+1)} | k+1 \rangle}
 \end{aligned} \tag{4.81}$$

wobei zu beachten ist, dass

$$\langle n - L_k \chi \rangle|_{l_k=0} = \langle \widehat{n - L_{k-1}} \chi \rangle \quad \text{aber} \quad \langle \widehat{n - L_k} \chi \rangle|_{l_k=0} \neq \langle \widehat{n - L_{k-1}} \chi \rangle \tag{4.82}$$

Der Ausdruck für l_1 ist Gleichung (4.38) in Abschnitt 4.5.1 zu entnehmen.

Im Zusammenspiel mit Gleichung (4.70) ist ersichtlich, dass sich die Größen N_2, N_3 sowie D_1, D_2, D_3 fast ausschließlich aus dem Produkt der Faktoren d_{l_j} zusammensetzen. Insbesondere liefert dieses Produkt die notwendigen Terme zur Kompensation der Impulsfaktoren bei Kontraktion der Spinorlösung. Dabei entstehen Terme der Form $[a a + 1]$ mit a wie in (4.5).

4. Split Helicity Gluonamplituden

Genauer gilt die

Feststellung 4.6. 1) Der Faktor N_2 entsteht als Korrekturfaktor beim Zusammen-
setzen der Terme $F_{q,n-(L_{k-1}+1)}F_{n-L_{k-1},n-(L_{k-2}+1)} \cdots F_{n-l_1,1}$ zu $F_{q,1}$.

2) Der Quotient

$$\frac{N_3}{\delta_{q,3} (1 - \overline{F}_{2,q-1}) + \overline{F}_{2,q-1}}$$

ist eine Folge der Vereinheitlichung aller Summanden. Durch N_3 werden alle die
Faktoren aus dem Nenner kompensiert, die wegen fehlender Kontraktion nicht
vorhanden sind.

Zur Illustration dieser Sachverhalte befindet sich in Anhang D die Rechnung für den
Fall $q = 4$.

4.8. Konstruktion der \overline{MHV} -Lösung

Als Konsequenz aus den Ideen der beiden vorherigen Abschnitte wiederholen wir
diesmal die Abbildung

$$A_{q,n-q} \rightarrow A_{x,n-q-1}$$

solange bis $n - (q + 1) = q + 2$. Daher finden wir also die

Konsequenz 4.4. Die \overline{MHV} -Lösung ist eine vollständige Zerlegung nach \overline{MHV}
Amplituden.

Im k -ten Schritt des Verfahrens hat die Zerlegung dabei folgende Struktur ($l_i = j_i$):

$$A_{q,n-q} = \sum_{l_1} \cdots \sum_{l_k} \left(\prod_{i=1}^k \overline{d}_{l_i} \right) A \left((\hat{L}_k)^-, \dots, q^-, q+1^+ \dots, \widehat{n - k_{l_1, \dots, l_k}}^+ \right) \quad (4.83)$$

Für die Bestimmung der Summandenzahl gilt: Bezeichne k nun die Anzahl aller
abgespaltenen Amplituden $A_{1,2}$ und p die vom Typ $A_{2,1}$, dann ergibt sich zunächst
ein kombinatorischer Faktor von

$$C_n^k = \binom{k-1+p-1}{p-1} \quad (4.84)$$

Da das Verfahren stoppt wenn $n - k = q + 2 \Leftrightarrow k = n - (q + 2)$, findet sich

$$\boxed{\text{Anzahl aller Summanden} = \sum_{p=1}^{q-1} \binom{(n - (q + 3) + p - 1)}{p - 1} \stackrel{(n-q) \neq 2}{=} \binom{n - 4}{(n - q) - 2}}$$
(4.85)

Die notwendigen Spinorlösungen im k -ten Schritt ergeben sich zu

$$\boxed{\begin{aligned} \left(\tilde{\lambda}_{\widehat{L}_k}\right)_{l_1, \dots, l_k} &= -[L_k \widehat{n - (k - 1)}_{l_1, \dots, l_{k-1}}] \frac{P_{L_k+1, n-k} |n - k\rangle}{\langle n - k | P_{L_k+1, n-(k-1)} |n - \widehat{(k - 1)}_{l_1, \dots, l_{k-1}}\rangle} \\ \left(\tilde{\lambda}_{\widehat{n-k}}\right)_{l_1, \dots, l_k} &= \frac{P_{n-k, L_k} P_{L_k+1, n-k} |n - \widehat{(k - 1)}_{l_1, \dots, l_{k-1}}\rangle}{\langle n - k | P_{L_k+1, n-k} |n - \widehat{(k - 1)}_{l_1, \dots, l_{k-1}}\rangle} \end{aligned}}$$
(4.86)

mit

$$\begin{aligned} \lambda_{\widehat{n}} &= \lambda_n \quad \text{und} \\ l_1 \equiv j \in \{1, \dots, q - 1\} \quad \text{sowie} \quad l_{i>1} \in \{0, \dots, q - 1 - L_{i-1}\}. \end{aligned}$$
(4.87)

Den Vorfaktor \bar{d}_{l_k} berechnet man daher zu ($k \neq 1$)

$$\begin{aligned} \bar{d}_{l_k} &= \left[(1 - \delta_{0, l_k}) \prod_{r=0}^{l_k-1} \bar{v}_r + \delta_{0, l_k} \right] \bar{h}_{l_k}, \quad \text{wobei} \\ \bar{v}_r &= \frac{[n - \widehat{(k - 1)}_{L_{k-1}} + (r + 1)]}{[n - \widehat{(k - 1)}_{L_{k-1}} + r] [L_{k-1} + r L_{k-1} + (r + 1)]}, \\ \bar{h}_{l_k} &= \frac{\langle n - k | P_{L_k+1, n-k} |n - \widehat{(k - 1)}_{l_1, \dots, l_{k-1}}\rangle [L_k \widehat{n - (k - 1)}]}{P_{L_k+1, n-k}^2 \langle n - k | P_{L_k, n-k} |L_k\rangle}. \end{aligned}$$
(4.88)

Also

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{d}_{l_k} &= \delta_{0, l_k} \frac{\langle n - k | P_{L_k+1, n-k} |n - \widehat{(k - 1)}_{l_1, \dots, l_{k-1}}\rangle [L_k \widehat{n - (k - 1)}]}{P_{L_k+1, n-k}^2 \langle n - k | P_{L_k, n-k} |L_k\rangle} \\ &\quad - (1 - \delta_{0, l_k}) \frac{\langle n - k | P_{L_k+1, n-k} |n - \widehat{(k - 1)}_{l_1, \dots, l_{k-1}}\rangle [L_k \widehat{n - (k - 1)}]^2}{P_{L_k+1, n-k}^2 \langle n - k | P_{L_k, n-k} |L_k\rangle} \\ &\quad \times \frac{1}{[n - \widehat{(k - 1)}_{\widehat{L}_{k-1}}] [\widehat{L}_{k-1} L_{k-1} + 1] \overline{F}_{L_{k-1+1}, L_k}}. \end{aligned}}$$
(4.89)

4. Split Helicity Gluonamplituden

Erneut ist zu beachten, dass

$$[L_k \chi]_{|l_k=0} = [\hat{L}_{k-1} \chi] \quad \text{ist, aber} \quad [\hat{L}_k \chi]_{|l_k=0} \neq [\hat{L}_{k-1} \chi] \quad (4.90)$$

gilt. An diese Grundüberlegungen schließen sich nun analoge Folgerungen wie im vorangegangenen Abschnitt an. So existieren auch hier im Zähler für

$$[q+1 \widehat{q+2}]_{l_{n-(q+2)}} = [q+1 | P_{q+2, l_1} \cdots P_{l_{n-(q+2)+1}, n-1} | n] \quad (4.91)$$

Terme mit unterschiedlicher Länge, die durch Kontraktion der Spinorlösung - wieder bei $l_i = 0$ - entstehen und nach denen geordnet werden kann. Diesmal werden aber die Faktoren $\overline{F}_{n, l_1} \overline{F}_{l_1+1, L_2} \cdots \overline{F}_{L_{n-(q+2)-1+1}, L_{n-(q+2)}} \overline{F}_{L_{n-(q+2)+1}, q+1}$ zu $\overline{F}_{n, q+1}$ „zusammengenäh“ und sorgen so für die Entstehung von \overline{N}_2 . Ferner erfährt der globale Faktor $\{\delta_{n-q,3} (1 - F_{q+2, n-1}) + F_{q+2, n-1}\}$ in \overline{D}_2 durch \overline{N}_3 seine notwendige Korrektur.

4.9. Zusammenfassung

Für die Klasse der Split Helicity Amplituden existieren kompakte Lösungen, bei denen es sich einmal um eine Zerlegung in MHV Amplituden und das andere Mal in \overline{MHV} Amplituden handelt. Konstruktionsbedingt sind beide Lösungen allein nicht manifest symmetrisch unter einer Paritätstransformation. Dieses Manko kann aber durch Bildung einer gleichgewichteten Summe behoben werden.

5 | Contaminated Split Helicity Amplituden

Im letzten Kapitel wurde ein Verfahren zur Zerlegung von Split Helicity Amplituden in MHV bzw. \overline{MHV} Amplituden vorgestellt. Wir werden nun sehen, dass uns diese Methode auch erlaubt Aussagen über kompliziertere Gluonamplituden zutreffen. Dazu untersuchen wir Gluonamplituden, bei denen die Helizitätsblockstruktur durch ein einzelnes Gluon gestört wird. Die Position dieses Gluons, im jeweils anderen Block, sei hierbei beliebig.

5.1. Klassifizierung und Besonderheiten

Ausgehend von der Split Helicity Klasse können wir zwei verschiedene Arten der Dotierung - und somit Unterklassen - unterscheiden:

1. n-Typ (Dotierung des positiven Helizitätsblockes):

$$\begin{aligned} A_{m^-,n}^{q-} &= A\left(\overset{1}{-}, \dots, \overset{q-1}{-}, \overset{q}{+}, \dots, +, \overset{\mathbf{m}}{-}, +, \dots, \overset{n}{+}\right) \\ &= A(1^-, \dots, (q-1)^-, q^+, \dots, (m-1)^+, \mathbf{m}^-, (m+1)^+, \dots, n^+) \end{aligned}$$

2. p-Typ (Dotierung des negativen Helizitätsblockes):

$$\begin{aligned} A_{m^+,n}^{q-} &= A\left(\overset{1}{-}, \dots, -, \overset{\mathbf{m}}{+}, -, \dots, \overset{q+1}{-}, +, \dots, \overset{n}{+}\right) \\ &= A(1^-, \dots, (m-1)^-, \mathbf{m}^+, (m+1)^-, \dots, (q+1)^-, (q+2)^+, \dots, n^+) \end{aligned}$$

Offensichtlich sind beide Subklassen zueinander konjugiert, so dass sich ihre Lösungen analog zur MHV - und \overline{MHV} -Lösung des vorigen Kapitels transformieren. Darüber hinaus sollten einige enge Verknüpfungen zu diesen Lösungen bestehen. Insbesondere sind für $q+m=n$ bzw. $m=1$ diese Amplituden durch zyklische Rotation wieder in die Split Helicity Klasse zurückzuführen. Ein Umstand, der auch bei der Zerlegung der anderen Fälle zum Tragen kommt.

5.2. Konstruktive Zerlegung des p-Typs

Als Ergebnis der einmaligen Anwendung der BCFW Rekursionsvorschrift erhält man folgende Struktur

$$\begin{aligned} A_{m^+,n}^{q-} &= \bar{v}_1 A\left(\overset{\hat{2}}{-}, \dots, -, \overset{\mathbf{m}}{+}, -, \dots, \overset{q+1}{-}, +, \dots, \overset{\hat{n}}{+}\right) \\ &\quad + A\left(\overset{1}{-}, \dots, -, \overset{\mathbf{m}}{+}, \overset{-\hat{P}}{+}\right) p_{1,m}^{-2} A\left(\overset{\hat{P}}{-}, -, \dots, \overset{q+1}{-}, +, \dots, +\right) \\ &\quad + \sum_{k=m+1}^q A\left(\overset{1}{-}, \dots, -, \overset{\mathbf{m}}{+}, -, \dots, \overset{k}{-}, \overset{-\hat{P}}{+}\right) p_{1,k}^{-2} A\left(\overset{\hat{P}}{-}, \overset{k+1}{-}, \dots, \overset{q+1}{-}, +, \dots, +\right) \\ &\quad + \bar{h}_1 A\left(\overset{\hat{1}}{-}, \dots, -, \overset{\mathbf{m}}{+}, -, \dots, \overset{q+1}{-}, +, \dots, \overset{\widehat{n-1}}{+}\right), \end{aligned} \tag{5.1}$$

wo bereits die Überlegungen von Seite 44 genutzt wurden. Im Vergleich zur Split Helicity Klasse verschwinden hier die mittleren Terme nicht mehr. Alle zusätzliche Terme sind dabei vom Typ $A_{\overline{MHV}} \times A_{Split}$. Ihre Berechnung sollte daher prinzipiell kein Problem sein.

5.2.1. Betrachtung der äußeren Terme

Wir ignorieren diese Beiträge jedoch vorerst und konzentrieren uns ausschließlich auf den ersten und letzten Summanden. Mit deren Rekursion haben wir uns schon im letzten Kapitel befaßt. Wenn wir nun erneut einen rekursiven Zusammenhang ableiten wollen, empfiehlt sich ein Vorgehen wie im Fall der \overline{MHV} -Lösung, wie explizite Berechnungen von \overline{nMHV} -Amplituden des p-Typs zeigen. Dabei bedarf es einer genaueren Untersuchung der Abbruchbedingung für die Abspaltung des Faktors \bar{v}_r . Durch die fortwährende Abspaltung des ersten Gluons erhalten wir nach $m - 2$ Schritten die Amplitude

$$A \left(\widehat{m-1}^{\mathbf{m}}, -, \dots, -^{q+1}, +^{q+2}, \dots, +^{\hat{n}} \right).$$

Es sind nun 2 Fälle zu unterscheiden:

- i) $m = q$, dann ist die Amplitude oben eine MHV -Amplitude und es im nächsten Schritt nicht mehr möglich die Amplitude vorn zu verkürzen, da $A(-, +, +)$ analog zu Gleichung (3.50) verschwindet.
- ii) $m < q$, dann können wir ein zusätzliches Gluon negativer Helizität abspalten. Das erste Gluon der entstehenden Amplitude hat nun aber positive Helizität, denn der Vorfaktor enthält die Amplitude $A(-, +, -)$. Die Änderung $A(-, -, +) \rightarrow A(-, +, -)$ hat jedoch keine Auswirkung auf den Vorfaktor \bar{v}_r , denn

$$\begin{aligned} A(\hat{j}^-, m^+, -\hat{P}_{\hat{j}, m}^-) \frac{1}{p_{\hat{j}, m}^2} &= -\frac{\langle \hat{j} \hat{P} \rangle^3}{\langle \hat{j} m \rangle \langle m \hat{P} \rangle} \times \frac{1}{\langle \hat{j} m \rangle [j m]} \\ &= \frac{[\hat{n} m]}{[\hat{n} j] [j m]} \frac{\langle \hat{j} \hat{P} \rangle^2}{\langle \hat{j} m \rangle^2} \end{aligned}$$

und die Invertierung des hinteren Faktors ist ohne Bedeutung. Die verbleibende Amplitude

$$A \left(\widehat{\mathbf{m}}, +, -, \dots, -^{q+1}, +^{q+2}, \dots, +^{\hat{n}}, \widehat{\mathbf{m}} \right) = A \left(\widehat{m+1}, -, \dots, -^{q+1}, +^{q+2}, \dots, +^{\hat{n}}, \widehat{\mathbf{m}} \right)$$

entspricht also einer Split Helicity Amplitude, deren Lösung durch die \overline{MHV} -Lösung aus Kapitel 4 gegeben ist.

5. Contaminated Split Helicity Amplituden

Bezeichnen wir den, nur aus den „Randtermen“ stammenden, Anteil der Lösung mit $\bar{\Lambda}_1$, so gilt:

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda}_1(m^+, q, n) &= \sum_{l_1=1}^{m-1} \bar{d}_{l_1} A\left(\hat{l}_1, \dots, \mathbf{m}, \dots, -, \overset{q+2}{+}, \dots, \widehat{n-1}\right) \\ &\quad + \left(\prod_{l_1=1}^{m-1} \bar{v}_{l_1}\right) A\left(\overset{m+1}{-}, \dots, \overset{q+1}{-}, \overset{q+2}{+}, \dots, \hat{n}, \hat{\mathbf{m}}\right). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Wiederholen wir das ganze nochmal, finden wir

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda}_1(m^+, q, n) &= \sum_{l_1=1}^{m-1} \sum_{l_2=1}^{m-1-(l_1-1)} \bar{d}_{l_1} \times \bar{d}_{l_2} A\left(\hat{l}_2, \dots, \mathbf{m}, \dots, -, \overset{q+2}{+}, \dots, \widehat{n-2}\right) \\ &\quad + \sum_{l_1=1}^{m-1} \bar{d}_{l_1} \times \left(\prod_{l_2=0}^{m-1-l_1} \bar{v}_{l_2}\right) A\left(\overset{m+1}{-}, \dots, \overset{q+1}{-}, \overset{q+2}{+}, \dots, \widehat{n-1}, \hat{\mathbf{m}}\right) \\ &\quad + \left(\prod_{l_1=1}^{m-1} \bar{v}_{l_1}\right) A\left(\overset{m+1}{-}, \dots, \overset{q+1}{-}, \overset{q+2}{+}, \dots, \hat{n}, \hat{\mathbf{m}}\right). \end{aligned}$$

Im k -ten Schritt ist dem zufolge

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda}_1(m^+, q, n) &= \sum_{l_1} \cdots \sum_{l_k} \left(\prod_{i=1}^k \bar{d}_{l_i}\right) A\left(\hat{l}_k, \dots, \mathbf{m}, \dots, -, \overset{q+2}{+}, \dots, \widehat{n-k}\right) \\ &\quad + \sum_{s=1}^{k-1} \left\{ \sum_{l_1} \cdots \sum_{l_s} \left(\prod_{i=1}^s \bar{d}_{l_i}\right) \times \right. \\ &\quad \quad \left. \left(\prod_{l_{s+1}=0}^{m-1-L_s} \bar{v}_{l_{s+1}}\right) A\left(\overset{m+1}{-}, \dots, \overset{q+1}{-}, \overset{q+2}{+}, \dots, \widehat{n-s}, \hat{\mathbf{m}}\right) \right\} \\ &\quad + \left(\prod_{l_1=1}^{m-1} \bar{v}_{l_1}\right) A\left(\overset{m+1}{-}, \dots, \overset{q+1}{-}, \overset{q+2}{+}, \dots, \hat{n}, \hat{\mathbf{m}}\right) \end{aligned} \quad (5.3)$$

mit \bar{d}_{l_i} und \bar{v}_{l_i} aus Abschnitt 4.8 bzw. 4.6.

Weil die Zerlegung abgeschlossen ist wenn gilt

$$n - k = q + 2 \Leftrightarrow k = n - (q + 2),$$

hat die erste Zeile der letzten Formel die Gestalt

$$\begin{aligned} \bar{S}_1 := & \sum_{l_1} \cdots \sum_{l_{n-(q+2)}} \left(\prod_{i=1}^{n-(q+2)} \bar{d}_{l_i} \right) \\ & \times A \left(\hat{L}_{n-(q+2)}^-, \dots, m - 1^-, \mathbf{m}^+, m + 1^-, \dots, q + 1^-, \widehat{q + 2}^+ \right). \end{aligned} \quad (5.4)$$

In Analogie zur \overline{MHV} -Lösung ist deshalb

$$\bar{S}_1 = \sum_{k=0}^{\min(n-q-3, q-2)} \sum_{A_k, B_{k+1}} \frac{\bar{N}_1 \bar{N}_2 \bar{N}_3}{\bar{D}_1 \bar{D}_2 \bar{D}_3} + \bar{\mathcal{E}} \quad (5.5)$$

mit

$$\begin{aligned} B_{k+1} &= \{b_{k+1}, b_k, \dots, b_1\} \subseteq \{1, \dots, m - 2\} & (b_{i+1} < b_i) \\ A_k &= \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subseteq \{q + 2, \dots, n - 2\} & (a_i < a_{i+1}) \end{aligned} \quad (5.6)$$

und

$$\begin{aligned} \bar{N}_1 &= \frac{[m | P_{q+2, b_1} P_{b_1+1, a_1} P_{a_1+1, b_2} \cdots P_{b_{k+1}+1, n-1} | n]^4}{[q + 1 | P_{q+2, b_1} P_{b_1+1, a_1} P_{a_1+1, b_2} \cdots P_{b_{k+1}+1, n-1} | n]} \\ \bar{N}_2 &= \prod_{i=1}^{k+1} [b_i + 1 \ b_i] & \bar{N}_3 &= \prod_{i=1}^k \langle a_i \ a_i + 1 \rangle \\ \bar{D}_1 &= P_{q+2, b_1}^2 P_{b_1+1, a_1}^2 P_{a_1+1, b_2}^2 \cdots P_{b_{k+1}+1, n-1}^2 \\ \bar{D}_2 &= \bar{F}_{n, q+1} \{ \delta_{n-q, 3} (1 - F_{q+2, n-1}) + F_{q+2, n-1} \} \\ \bar{D}_3 &= \langle q + 2 | P_{q+2, b_1} | b_1 + 1 \rangle \times [b_1 | P_{b_1+1, a_1} | a_1] \times \langle a_1 + 1 | P_{a_1+1, b_2} | b_2 + 1 \rangle \times \\ & \quad \cdots \times [b_{k+1} | P_{b_{k+1}+1, n-1} | n - 1] \\ \bar{\mathcal{E}} &= \delta_{n-q, 2} \frac{[m \ n]^4}{\bar{F}_{n, n-1} [n - 1 \ n]} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Dabei ist sehr schön zu sehen, dass sich für $m = q + 1$ wieder die altbekannten Gleichungen von Seite 40 als Lösung einstellen.

5. Contaminated Split Helicity Amplituden

Für die verbleibenden Terme von $\bar{\Lambda}_1$ eine effektive Gesamtlösung zu konstruieren, ist wesentlich trickreicher. Wir bemerken zuerst, dass die **blauen** Vorfaktoren für jeden Wert von s zu einer *MHV*-Lösung mit $q = s + 2$ Gluonen negativer Helizität gehören. Was jedoch fehlt, sind die mit dieser Zerlegung verbundenen *MHV* Amplituden, oder vielmehr deren analytischen Ausdrücke. Nun ergibt sich aber für den anderen Vorfaktor

$$\begin{aligned} \prod_{l_{s+1}=0}^{m-1-L_s} \bar{v}_{l_{s+1}} &= \prod_{l_{s+1}=0}^{m-1-L_s} \frac{[\widehat{n-s} L_s + (l_{s+1} + 1)]}{[\widehat{n-s} L_s + l_{s+1}] [L_s + l_{s+1}] L_s + (l_{s+1} + 1)} \\ &= \frac{[\widehat{n-s} m]}{[\widehat{n-s} \widehat{L}_s] [\widehat{L}_s L_s + 1] \bar{F}_{L_s+1, m}}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

was bis auf einen Faktor $[\widehat{n-s} m]^2$ gerade die notwendigen Terme liefert. Um den vollständigen Ausdruck zu erhalten, untersuchen wir die *MHV*-Lösung von $A\left((m+1)^-, \dots, q^-, q+1^-, q+2^+, \dots, \widehat{n-s}^+, \widehat{m}^+\right)$ genauer. Wie die Anwendung von (4.15) zeigt, benötigt man noch die Spinoren $\lambda_{\widehat{n-s}}$ und $\lambda_{\widehat{m}}$. Diese verschaffen wir uns aus den allgemeineren Lösungen

$$\left(\lambda_{\widehat{n-(k-1)}}\right)_{l_1, \dots, l_k} = \frac{P_{L_k+1, n-k} [L_k + 1]}{[L_k + 1] \widehat{n-(k-1)}} \stackrel{\substack{k-1=s \\ L_k+1=m}}{=} \frac{P_{m, n-(s+1)} [m]}{[m] \widehat{n-s}} \quad (5.9)$$

und

$$\begin{aligned} \left(\lambda_{\widehat{L}_k}\right)_{l_1, \dots, l_k} &= - \frac{P_{L_k+1, n-k} [n - (k-1)]}{[L_k] \widehat{n-(k-1)}} \\ &\stackrel{\substack{k-1=s \\ L_k=m}}{=} - \frac{P_{m+1, n-(s+1)} [\widehat{n-s}]}{[m] \widehat{n-s}}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Damit gilt unser Interesse Termen, die diese Spinoren enthalten. Bei den Propagatoren, welche beide Spinoren enthalten, gilt analog zur Rechnung aus Abschnitt 4.5.1

$$P_{\widehat{n-s}} + P_{\widehat{m}} = P_{n-s, m}.$$

Konzentrieren wir uns also zunächst auf Faktoren, die die Spinoren direkt enthalten. Wir finden dann:

- ◇ Es gibt keinen Faktor mit $\lambda_{\widehat{m}}$.
- ◇ $\lambda_{\widehat{n-s}}$ steckt im letzten Term von \bar{D}_3 .

- ◊ In Summanden die $\lambda_{\widehat{n-s}}$ in \overline{N}_3 enthalten, kommt $\lambda_{\widehat{n-s}}$ auch ein weiteres mal in \overline{D}_3 vor.
- ◊ Ist die Anzahl der Gluonen positiver Helizität größer als drei, gibt es einen Faktor in \overline{D}_2 welcher $\lambda_{\widehat{n-s}}$ enthält, wo hingegen im Fall von drei Gluonen positiver Helizität $\lambda_{\widehat{n-s}}$ auch im ersten Faktor von \overline{D}_3 enthalten ist.

Es verbleibt daher jedesmal der gesuchte Faktor $[\widehat{n-s} m]^2$. Eine Kompensation durch den noch nicht besprochenen Term \overline{N}_1 ist nicht zu befürchten, denn

$$\begin{aligned}
 & [q+2 | P_{q+3, b_1} \cdots P_{b_{k+1}+1, \widehat{n-s}} | m] \\
 &= [q+2 | P_{q+3, b_1} \cdots (P_{b_{k+1}+1, n-(s+1)} + P_{\widehat{n-s}}) | m] \\
 &= [q+2 | P_{q+3, b_1} \cdots \left(P_{b_{k+1}+1, n-(s+1)} + \frac{[\widehat{n-s} m]}{[m \widehat{n-s}]} P_{m+1, n-(s+1)} \right) | m] \quad (5.11) \\
 &= [q+2 | P_{q+3, b_1} \cdots P_{b_{k+1}+1, m-1} | m].
 \end{aligned}$$

Demnach steckt eigentlich in $P_{b_{k+1}+1, \widehat{n-s}}^2$ ein weiterer Faktor, den wir jedoch ignorieren wollen. Wir können dann die verbliebenen Terme von $\overline{\Lambda}_1$ effektiv durch

$$\begin{aligned}
 \overline{\mathcal{S}}_2 &:= \sum_{s=0}^{(n-q)-3} \left\{ \sum_{l_1} \cdots \sum_{l_s} \left(\prod_{i=1}^s \overline{d}_{l_i} \right) \times -A \left(\begin{matrix} \hat{l}_s, & m-1, & \mathbf{m}, & \widehat{n-s} \\ -, & -, & +, & + \end{matrix} \right) \right\} \\
 &\quad \times A' \left(\begin{matrix} m+1, & \dots, & q, & q+1, & q+2, & \dots, & \widehat{n-s}, & \hat{\mathbf{m}} \\ -, & \dots, & -, & -, & +, & \dots, & +, & + \end{matrix} \right) \\
 &= \sum_{s=0}^{(n-q)-3} -A \left(\begin{matrix} n-s, & n-s+1, & \dots, & n, & 1, & 2, & \dots, & m-1, & \mathbf{m} \\ +, & +, & \dots, & +, & -, & -, & \dots, & -, & + \end{matrix} \right) \\
 &\quad \times A' \left(\begin{matrix} \hat{\mathbf{m}}, & m+1, & \dots, & q, & q+1, & q+2, & \dots, & \widehat{n-s} \\ +, & -, & \dots, & -, & -, & +, & \dots, & + \end{matrix} \right) \quad (5.12)
 \end{aligned}$$

beschreiben. Dabei wurde $L_0 \equiv 1$ sowie $\hat{n} \equiv n$ gesetzt und der Strich an der zweiten Amplitude symbolisiert das Herausziehen des oben besprochenen Faktors.

Aus dieser Form lässt sich nun wesentlich einfacher ein analytischer Ausdruck gewinnen als aus dem ursprünglichen Term. Das wollen wir jedoch nicht tun. Stattdessen werfen wir einen Blick auf die bisher nicht besprochenen Zwischensummanden.

5.2.2. Betrachtung der mittleren Terme

Ohne Frage stellen die zusätzlich auftretenden Summanden $A_{\overline{MHV}} \times A_{Split}$ das eigentliche Problem beim Auffinden einer allgemeinen Lösung dar. Ein Grund ist ihre Anzahl, die in der Gesamtsumme dominiert. Wir wollen daher ihre Beiträge systematisch erfassen. Dazu definieren wir im ersten Schritt:

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathfrak{A}}_{1,n} &:= A\left(\frac{1}{-}, \dots, -, +, +\right) p_{1,m}^{-2} A\left(\frac{\hat{P}}{-}, -, \dots, \frac{q+1}{-}, +, \dots, \frac{n}{+}\right) \\
 &+ \sum_{k=m+1}^q A\left(\frac{1}{-}, \dots, -, +, -, \dots, \frac{k}{-}, +\right) p_{1,k}^{-2} \\
 &\quad \times A\left(\frac{\hat{P}}{-}, \frac{k+1}{-}, \dots, \frac{q+1}{-}, +, \dots, \frac{n}{+}\right) \\
 &= \sum_{k=m}^q \frac{[m \hat{P}_{1,k}]^4}{[\hat{P}_{1,k} 1] \bar{F}_{1,k} [k \hat{P}_{1,k}]} p_{1,k}^{-2} A\left(\frac{\hat{P}}{-}, \frac{k+1}{-}, \dots, \frac{q+1}{-}, +, \dots, \frac{n}{+}\right) \quad (5.13)
 \end{aligned}$$

Mit diesem Symbol lautet nun der Anteil der Zwischensummanden für den Rekursionsschritt $n - q \rightarrow (n - q) - 1$

$$\bar{\mathfrak{A}}_{1,n} + \sum_{i=1}^{m-2} \left(\prod_{r=1}^i \bar{v}_r \right) \bar{\mathfrak{A}}_{i+1,n} =: \bar{\mathbb{A}}_{1,n}. \quad (5.14)$$

Unter Verwendung dieser neuen Definition erhalten wir aus dem Schritt $(n - q) - 1 \rightarrow (n - q) - 2$ die Beiträge

$$\sum_{l_1=1}^{m-1} \bar{d}_{l_1} \bar{\mathbb{A}}_{l_1, n-1}. \quad (5.15)$$

Insgesamt tragen die Zwischensummanden deshalb mit

$$\bar{\mathfrak{S}}_3(m^+, q, n) := \bar{\mathbb{A}}_{1,n} + \sum_{s=1}^{k-1} \left\{ \sum_{l_1} \cdots \sum_{l_s} \left(\prod_{t=1}^s \bar{d}_{l_t} \right) \times \bar{\mathbb{A}}_{L_s, n-s} \right\} \quad (5.16)$$

zur Amplitude $A_{m^+, n}^{q-}$ bei.

Man könnte nun wegen der auftretenden Produkte mit \hat{P} in (5.13) formalen Schwierigkeiten bei der Berechnung der einzelnen $A_{\overline{MHV}} \times A_{Split}$ Terme vermuten.

Aus der \overline{MHV} -Lösung folgt aber

$$A_{Split} \propto \frac{[k+1\hat{P}]}{[n\hat{P}][\hat{P}k+1][\hat{P}|P_{k+1,a_1}|a_1]} \propto \frac{1}{[\hat{P}n][\hat{P}|P_{k+1,a_1}|a_1]}, \quad (5.17)$$

so dass alle Faktoren $[\chi\hat{P}]$ verrechnet werden.

Wie in (5.16) schon zu sehen, weist $\bar{\mathcal{S}}_3$ eine **analoge Struktur** wie $\bar{\mathcal{S}}_2$ auf. Im Gegensatz zur Diskussion oben benötigen wir hier nicht die Spinoren $\lambda_{\hat{m}}$ oder $\lambda_{\widehat{n-s}}$, um einen effektiven Term zu konstruieren. Die jeweilige \overline{MHV} -Lösung enthält nämlich mit

$$\bar{N}_1 = [q+2|\cdots|\widehat{n-s}]^3$$

bereits einen geeigneten Faktor. Allerdings verkompliziert diese Umstand auch das Auffinden eines kompakten Ausdruckes enorm, weshalb wir die Idee an dieser Stelle nicht weiter verfolgen wollen.

Unser abschließendes Resultat für den p-Typ lautet daher

$$\boxed{A_{m^+,n}^{q-} = \bar{\mathcal{S}}_1 + \bar{\mathcal{S}}_2 + \bar{\mathcal{S}}_3}. \quad (5.18)$$

5.3. Konstruktive Zerlegung des n-Typs

Wie im einleitenden Abschnitt dargelegt, gehen diese Amplituden und deren Zerlegung durch komplexe Konjugation aus dem p-Typ hervor. Das bestätigt sich unter anderem bei den, im Vergleich zu Split Helicity Amplituden, zusätzlich auftretenden Summanden. Sie sind hier vom Typ $A_{Split} \times A_{MHV}$:

$$\begin{aligned} A_{m^-,n}^{q-} &= v_1 A \left(\hat{2}, \dots, \overset{q-1}{-}, \overset{q}{+}, \dots, +, \overset{\mathbf{m}}{-}, +, \dots, \overset{\hat{n}}{+} \right) \\ &+ \sum_{k=q}^{m-2} A \left(\overset{1}{-}, \dots, \overset{q-1}{-}, \overset{q}{+}, \dots, \overset{k}{+}, \overset{-\hat{P}}{+} \right) p_{1,k}^{-2} A \left(\overset{\hat{P}}{-}, \overset{k+1}{+}, \dots, \overset{\mathbf{m}}{-}, +, \dots, \overset{n}{+} \right) \\ &+ A \left(\overset{1}{-}, \dots, \overset{q-1}{-}, \overset{q}{+}, \dots, \overset{m-1}{+}, \overset{-\hat{P}}{+} \right) p_{1,m-1}^{-2} A \left(\overset{\hat{P}}{-}, \overset{\mathbf{m}}{-}, +, \dots, + \right) \\ &+ h_1 A \left(\hat{1}, \dots, \overset{q-1}{-}, \overset{q}{+}, \dots, +, \overset{\mathbf{m}}{-}, +, \dots, \overset{\widehat{n-1}}{+} \right). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Ausgehend von dieser Überlegung verfahren wir im weiteren analog zum letzten Abschnitt.

5.3.1. Betrachtung der äußeren Terme

In Anlehnung an den gegebenen Zusammenhang nutzen wir für die äußeren Summanden der Zerlegung eine Prozedur wie im Fall der *MHV*-Lösung. Die entscheidende Amplitude ist nun aber

$$A \left(\hat{1}, \dots, \overset{q-1}{-}, \overset{q}{+}, \dots, +, \overset{\mathbf{m}}{-}, \widehat{\overset{m+1}{+}} \right).$$

Auch hier ist zu beachten, dass für $m > q + 1$ zusätzliche Summanden durch Split Helicity Amplituden der Form

$$A \left(\widehat{\mathbf{m}}, \hat{1}, \dots, \overset{q-1}{-}, \overset{q}{+}, \dots, +, \overset{m-1}{+} \right)$$

auftreten. Es ergibt sich also in der Terminologie des letzten Abschnittes

$$\begin{aligned} \Lambda_1 (m^-, q, n) &= \sum_{l_1=0}^{m+1} d_{l_1} A \left(\hat{2}, \dots, \overset{q-1}{-}, \overset{q}{+}, \dots, +, \overset{\mathbf{m}}{-}, \dots, \widehat{\overset{n-l_1}{+}} \right) \\ &+ \left(\prod_{l_1=0}^{n-m-1} h_{l_1} \right) A \left(\widehat{\mathbf{m}}, \hat{1}, \dots, \overset{q-1}{-}, \overset{q}{+}, \dots, \overset{m-1}{+} \right), \end{aligned} \quad (5.20)$$

beziehungsweise bei k -facher Rekursion

$$\begin{aligned} \Lambda_1 (m^-, q, n) &= \sum_{l_1} \dots \sum_{l_k} \left(\prod_{i=1}^k d_{l_i} \right) A \left(\widehat{\overset{k+1}{-}}, \dots, \overset{q-1}{-}, \overset{q}{+}, \dots, +, \overset{\mathbf{m}}{-}, \dots, \widehat{\overset{n-L_k}{+}} \right) \\ &+ \sum_{s=1}^{k-1} \left\{ \sum_{l_1} \dots \sum_{l_s} \left(\prod_{i=1}^s d_{l_i} \right) \times \left(\prod_{l_{s+1}=0}^{n-m-1-L_s} h_{l_{s+1}} \right) \right. \\ &\quad \left. \times A \left(\widehat{\mathbf{m}}, \widehat{\overset{s+1}{-}}, \dots, \overset{q-1}{-}, \overset{q}{+}, \dots, \overset{m-1}{+} \right) \right\} \\ &+ \left(\prod_{l_1=0}^{n-m-1} h_{l_1} \right) A \left(\widehat{\mathbf{m}}, \hat{1}, \dots, \overset{q-1}{-}, \overset{q}{+}, \dots, \overset{m-1}{+} \right). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Eine Zerlegung in MHV -Amplituden ist dabei erreicht, wenn $k + 1 = q - 1$ gilt. Ebenso wie vorher lässt sich dann für den ersten Term

$$\mathcal{S}_1 := \sum_{l_1} \cdots \sum_{l_{q-2}} \left(\prod_{i=1}^{q-2} d_{l_i} \right) \times A \left(\widehat{q-1}^-, q^+, \dots, m-1^+, \mathbf{m}^-, m+1^+, \dots, \widehat{n-L_{q-2}}^+ \right) \quad (5.22)$$

durch

$$\mathcal{S}_1 = \sum_{k=0}^{\min(q-3, n-q-2)} \sum_{A_k, B_{k+1}} \frac{\mathcal{N}_1 \mathcal{N}_2 \mathcal{N}_3}{\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2 \mathcal{D}_3} + \mathcal{E} \quad (5.23)$$

mit

$$\begin{aligned} A_k &= \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subseteq \{2, \dots, q-2\} & (a_i < a_{i+1}) \\ B_{k+1} &= \{b_{k+1}, b_k, \dots, b_1\} \subseteq \{m+1, \dots, n-1\} & (b_{i+1} < b_i) \end{aligned} \quad (5.24)$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1 &= \frac{\langle 1 | P_{2,b_1} P_{b_1+1,a_1} P_{a_1+1,b_2} \cdots P_{b_{k+1}+1,q-1} | m \rangle^4}{\langle 1 | P_{2,b_1} P_{b_1+1,a_1} P_{a_1+1,b_2} \cdots P_{b_{k+1}+1,q-1} | q \rangle} \\ \mathcal{N}_2 &= \prod_{i=1}^{k+1} \langle b_i + 1 | b_i \rangle & \mathcal{N}_3 &= \prod_{i=1}^k [a_i | a_i + 1] \\ \mathcal{D}_1 &= P_{2,b_1}^2 P_{b_1+1,a_1}^2 P_{a_1+1,b_2}^2 \cdots P_{b_{k+1}+1,q-1}^2 \\ \mathcal{D}_2 &= F_{q,1} \{ \delta_{q,3} (1 - \overline{F}_{2,q-1}) + \overline{F}_{2,q-1} \} \\ \mathcal{D}_3 &= [2 | P_{2,b_1} | b_1 + 1 \rangle \times \langle b_1 | P_{b_1+1,a_1} | a_1 \rangle \times [a_1 + 1 | P_{a_1+1,b_2} | b_2 + 1 \rangle \times \\ &\quad \cdots \times \langle b_{k+1} | P_{b_{k+1}+1,q-1} | q - 1 \rangle \\ \mathcal{E} &= \delta_{q,2} \frac{\langle 1 | m \rangle^4}{F_{1,n} \langle n | 1 \rangle} \end{aligned} \quad (5.25)$$

eine Lösung angeben. Ähnlich wie im konjugierten Fall, erfolgt für $m = q$ ein Übergang zur bekannten MHV -Lösung von Seite 37.

Im Hinblick auf den verbliebenen Anteil in Λ_1 finden wir zunächst

$$\prod_{l_{s+1}=0}^{n-m-1-L_s} h_{l_{s+1}} = \frac{\langle m | \widehat{s+1} \rangle}{F_{m, n-L_s-1} \langle n-L_s-1 | \widehat{n-L_s} \rangle \langle \widehat{n-L_s} | s+1 \rangle} . \quad (5.26)$$

5. Contaminated Split Helicity Amplituden

Desweiteren erhalten wir aus einer gründlichen Diskussion der Amplitude $A(\widehat{\mathbf{m}}^-, \widehat{1}^-, \dots, (q-1)^-, q^+, \dots, (m-1)^+)$, unter Verwendung der Spinorlösungen

$$\left(\widetilde{\lambda}_{\widehat{k}}\right)_{l_1, \dots, l_k} = \frac{P_{k+1, n-L_k-1} |n-L_k-1\rangle_{L_k-1=n-m} \stackrel{k=s+1}{=} \frac{P_{s+2, m-1} |m\rangle}{\langle n-L_k-1 \widehat{k} \rangle \langle m \widehat{s+1} \rangle} \quad (5.27)$$

sowie

$$\left(\widetilde{\lambda}_{\widehat{n-L_k}}\right)_{l_1, \dots, l_k} = \frac{-P_{k+1, n-L_k-1} |\widehat{k}\rangle_{L_k=n-m} \stackrel{k=s+1}{=} \frac{-P_{s+2, m-1} |\widehat{s+1}\rangle}{\langle n-L_k-1 \widehat{k} \rangle \langle m \widehat{s+1} \rangle}, \quad (5.28)$$

den noch fehlenden Faktor $\langle m \widehat{s+1} \rangle^2$. Insgesamt ermöglicht uns das die Umformung

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_2 &:= \sum_{s=0}^{q-3} \left\{ \sum_{l_1} \cdots \sum_{l_s} \left(\prod_{i=1}^s d_{l_i} \right) \times -A \left(\widehat{s+1}, \widehat{\mathbf{m}}, \widehat{m+1}, \dots, \widehat{n-L_s} \right) \right\} \\ &\quad \times A' \left(\widehat{\mathbf{m}}, \widehat{s+1}, \dots, \widehat{q-1}, \widehat{+}, \dots, \widehat{m-1} \right) \\ &= \sum_{s=0}^{q-3} -A \left(\widehat{\mathbf{m}}, \widehat{m+1}, \dots, \widehat{n-1}, \widehat{s+1} \right) \times A' \left(\widehat{s+1}, \dots, \widehat{q-1}, \widehat{+}, \dots, \widehat{m-1}, \widehat{\mathbf{m}} \right). \end{aligned} \quad (5.29)$$

5.3.2. Betrachtung der mittleren Terme

Befassen wir uns nun mit den eingangs schon erwähnten Zwischensummanden. Wie zuvor definieren wir

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{1, n} &:= \sum_{k=q}^{m-2} A \left(\widehat{1}, \dots, \widehat{q-1}, \widehat{q}, \dots, \widehat{k}, \widehat{-\hat{P}} \right) p_{1, k}^{-2} A \left(\widehat{\hat{P}}, \widehat{k+1}, \dots, \widehat{m}, \widehat{+}, \dots, \widehat{n} \right) \\ &\quad + A \left(\widehat{1}, \dots, \widehat{q-1}, \widehat{q}, \dots, \widehat{m-1}, \widehat{-\hat{P}} \right) p_{1, m-1}^{-2} A \left(\widehat{\hat{P}}, \widehat{m}, \widehat{+}, \dots, \widehat{n} \right) \\ &= \sum_{k=q}^{m-1} A \left(\widehat{1}, \dots, \widehat{q-1}, \widehat{q}, \dots, \widehat{k}, \widehat{-\hat{P}} \right) p_{1, k}^{-2} \frac{\langle \widehat{\hat{P}}, k \mathbf{m} \rangle^4}{\langle \widehat{\hat{P}}, k+1 \rangle F_{k+1, n} \langle n \widehat{\hat{P}} \rangle}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Damit schreibt sich dann der Anteil der Zwischensummanden im Rekursionsschritt $q \rightarrow q - 1$ zu

$$\mathfrak{A}_{1,n} + \sum_{i=0}^{n-(m+2)} \left(\prod_{r=0}^i h_r \right) \mathfrak{A}_{1,n-(i+1)} =: \mathbb{A}_{1,n}, \quad (5.31)$$

wobei

$$h_r = \frac{\langle 1 \ n - (r + 1) \rangle}{\langle n - (r + 1) \ n - r \rangle \langle 1 \ n - r \rangle}$$

gilt. Der Gesamtbeitrag zur Amplitude $A_{m^-,n}^{q-}$ ist deshalb durch

$$\mathcal{S}_3(m^+, q, n) := \mathbb{A}_{1,n} + \sum_{s=1}^{k-1} \left\{ \sum_{l_1} \cdots \sum_{l_s} \left(\prod_{t=1}^s d_{l_t} \right) \times \mathbb{A}_{s+1, n-L_s} \right\} \quad (5.32)$$

gegeben.

Natürlich gelten für \mathcal{S}_3 analoge Aussagen wie für den Gegenpart $\bar{\mathcal{S}}_3$. Weil diese aber gegenwärtig zu keiner wesentlichen Verbesserung führen, verzichten wir darauf sie explizit anzugeben.

Es gilt schließlich:

$$\boxed{A_{m^-,n}^{q-} = \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 + \mathcal{S}_3}. \quad (5.33)$$

5.4. Berechnung im NMHV Fall

Wir wollen abschließend für den einfachsten Fall, $A_{m^-,n}^{3-}$, die abgeleiteten Terme ausrechnen. Als erstes lesen wir den Beitrag \mathcal{S}_1 zu

$$\mathcal{S}_1 = \sum_{b=m+1}^{n-1} \frac{\langle 1 | P_{2,b+1} P_{b+1,2} | m \rangle^4}{\langle 1 | P_{2,b+1} P_{b+1,2} | 3 \rangle} \times \frac{\langle b + 1 \ b \rangle}{F_{3,1} P_{2,b}^2 P_{b+1,2}^2 [2 | P_{2,b} | b + 1 \rangle \langle b | P_{b+1,2} | 2 \rangle} \quad (5.34)$$

ab. Für den zweiten Beitrag, \mathcal{S}_2 , finden wir zunächst

$$\mathcal{S}_2 = \frac{\langle m \ 1 \rangle}{F_{m,1}} \times \sum_{k=3}^{m-2} \frac{\langle m | P_{\hat{1},k} P_{k+1,\hat{1}} | 2 \rangle^3}{F_{2,m} P_{\hat{1},k}^2 P_{k+1,\hat{1}}^2} \times \frac{\langle k + 1 \ k \rangle}{[\hat{1} | P_{\hat{1},k} | k + 1 \rangle \langle k | P_{k+1,\hat{1}} | \hat{1} \rangle]}. \quad (5.35)$$

Wegen

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}_{n-(j-1)}|_{j-1=n-m} &= \frac{-1}{\langle m \, 1 \rangle} P_{2,m-1} |1\rangle, \\ (\tilde{\lambda}_{\hat{1}})_j|_{j=n-m} &= \frac{1}{\langle m \, 1 \rangle} P_{2,m-1} |m\rangle\end{aligned}\tag{5.36}$$

ist aber

$$\begin{aligned}P_{\hat{m}} + P_{\hat{1}} &= P_{m,1} \Rightarrow P_{k+1,\hat{1}} = P_{k+1,1}, \\ \langle m | P_{\hat{1},k} &= \langle m | (P_{m+1,1} + P_{2,k}) = \langle m | P_{m+1,k}, \\ [\hat{1} | P_{\hat{1},k} | k+1\rangle &= \langle m \, 1 \rangle^{-1} \langle m | P_{m+1,1} P_{2,k} | k+1\rangle, \\ \langle k | P_{k+1,\hat{1}} | \hat{1} \rangle &= \langle m \, 1 \rangle^{-1} \langle k | P_{k+1,2} P_{2,m-1} | m \rangle,\end{aligned}\tag{5.37}$$

so dass \mathcal{S}_2 wie besprochen die Form

$$\mathcal{S}_2 = \frac{\langle m \, 1 \rangle^3}{F_{m,1}} \times \sum_{k=3}^{m-2} \frac{\langle m | P_{m+1,k} P_{k+1,1|2} \rangle^3 \langle k+1 \, k \rangle}{F_{2,m} P_{\hat{1},k}^2 P_{k+1,1}^2 \langle m | P_{m+1,1} P_{2,k} | k+1 \rangle \langle k | P_{k+1,2} P_{2,m-1} | m \rangle}\tag{5.38}$$

annimmt. Diesen Ausdruck können wir dann zu

$$\mathcal{S}_2 = \sum_{k=3}^{m-2} \frac{\langle m | P_{m+1,k} P_{k+1,1|2} \rangle^3 \langle k+1 \, k \rangle \langle m \, 1 \rangle^3}{F_{2,1} P_{\hat{1},k}^2 P_{k+1,1}^2 \langle m | P_{m+1,1} P_{2,k} | k+1 \rangle \langle k | P_{k+1,2} P_{2,m-1} | m \rangle}\tag{5.39}$$

zusammenfassen.

Der Summand \mathcal{S}_3 besteht für die Amplituden $A_{m^-,n}^{3-}$ aus

$$\mathbb{A}_{1,n} = \mathfrak{A}_{1,n} + \sum_{i=0}^{n-(m+2)} \left(\prod_{r=0}^i h_r \right) \mathfrak{A}_{1,n-(i+1)}.\tag{5.40}$$

Hierin ist $\mathfrak{A}_{1,n}$ nach (5.30) gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{1,n} &= \sum_{k=3}^{m-1} \frac{\langle 12 \rangle^3 \langle k+1k \rangle}{F_{1,n-1} p_{1,k}^2} \times \frac{\langle m | P_{1,k} | n \rangle^4}{\langle 1 | P_{1,k} | n \rangle [n | P_{1,k} | k+1] \langle k | P_{k+1,n-1} | n \rangle} \\ &\quad \times \frac{1}{\langle \hat{n} | P_{1,k} | n \rangle \langle n-1 \hat{n} \rangle} \end{aligned} \quad (5.41)$$

$$\text{mit } \lambda_{\hat{n}} = \lambda_n - \frac{p_{1,k}^2}{\langle 1 | P_{1,k} | n \rangle} \lambda_1.$$

Außerdem berechnet man

$$\prod_{r=0}^i h_r = \frac{\langle n - (i+1) 1 \rangle}{F_{n-(i+1),1}} \quad (5.42)$$

und ferner

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{1,n-(i+1)} &= \sum_{k=3}^{m-1} \frac{2 \langle 12 \rangle^3 \langle k+1k \rangle}{F_{1,n-(i+2)} P_{1,k}^2} \times \frac{\langle m | P_{\hat{1},k} | n - \widehat{(i+1)} \rangle^4}{\langle 1 | P_{\hat{1},k} | n - \widehat{(i+1)} \rangle} \\ &\quad \times \frac{1}{[n - \widehat{(i+1)} | P_{\hat{1},k} | k+1] \langle k | P_{k+1,n-(i+2)} | n - \widehat{(i+1)} \rangle} \\ &\quad \times \frac{1}{\langle n - \widehat{(i+1)} | P_{\hat{1},k} | n - \widehat{(i+1)} \rangle \langle n - (i+2) n - \widehat{(i+1)} \rangle} \\ &= \sum_{k=3}^{m-1} \frac{2 \langle 12 \rangle^3 \langle k+1k \rangle}{F_{1,n-(i+2)} P_{1,k}^2} \times \frac{\langle m | P_{\hat{1},k} P_{n-(i+1),1} | 1 \rangle^4}{\langle 1 | P_{\hat{1},k} P_{n-(i+1),1} | 1 \rangle} \\ &\quad \times \frac{1}{\langle 1 | P_{2,n-(i+2)} P_{\hat{1},k} | k+1 \rangle \langle k | P_{k+1,n-(i+2)} P_{n-(i+1),1} | 1 \rangle} \\ &\quad \times \frac{1}{\langle n - \widehat{(i+1)} | P_{\hat{1},k} P_{n-(i+1),1} | 1 \rangle \langle n - (i+2) n - \widehat{(i+1)} \rangle} \end{aligned} \quad (5.43)$$

$$\begin{aligned} \text{wobei } \lambda_{n-\widehat{(i+1)}} &= \lambda_{n-(i+1)} - \frac{P_{\hat{1},k}^2 \langle n - (i+2) 1 \rangle}{2 \langle 1 | P_{\hat{1},k} P_{n-(i+1),1} | 1 \rangle} \lambda_1 \\ \lambda_{\hat{1}} &\equiv (\lambda_{\hat{1}})_i = \frac{P_{2,n-i} | n-i \rangle}{\langle n-i 1 \rangle}. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Daraus ergibt sich der Beitrag der mittleren Summanden zu

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}_3 = & \sum_{k=3}^{m-1} \frac{\langle 1 2 \rangle^3 \langle k+1 k \rangle}{F_{1,n-1} p_{1,k}^2} \times \frac{\langle m | P_{1,k} | n \rangle^4}{\langle 1 | P_{1,k} | n \rangle [n | P_{1,k} | k+1] \langle k | P_{k+1,n-1} | n \rangle} \\
 & \times \frac{1}{\langle \hat{n} | P_{1,k} | n \rangle \langle n-1 \hat{n} \rangle} \\
 & + \sum_{i=0}^{n-(m+2)} \left\{ \frac{2 \langle 1 2 \rangle^3 \langle n-(i+1) 1 \rangle}{F_{1,n-1}} \sum_{k=3}^{m-1} \frac{\langle m | P_{\hat{1},k} P_{n-(i+1),1} | 1 \rangle^4}{\langle 1 | P_{2,k} P_{n-(i+1),1} | 1 \rangle P_{\hat{1},k}^2} \right. \\
 & \times \frac{\langle k+1 k \rangle}{\langle 1 | P_{2,n-(i+2)} P_{\hat{1},k} | k+1 \rangle \langle k | P_{k+1,n-(i+2)} P_{n-(i+1),1} | 1 \rangle} \\
 & \left. \times \frac{\langle n-(i+2) n-(i+1) \rangle}{\langle n-(i+1) | P_{\hat{1},k} P_{n-(i+1),1} | 1 \rangle \langle n-(i+2) n-(i+1) \rangle} \right\}. \quad (5.45)
 \end{aligned}$$

5.5. Zusammenfassung

Durch die Verwendung der in Kapitel 4 entwickelten Technik konnte diese neue Klasse vollständig auf bekannte Amplituden, insbesondere den Split Helicity Typ, zurückgeführt werden. Dabei wurden zum Teil kompakte analytische Ausdrücke erreicht oder die Grundlagen dazu gelegt. Allerdings ist es deutlich schwieriger als bei Split Helicity Amplituden einen effektiven, analytischen Ausdruck zu entwickeln. Zudem ist es fraglich, ob eine einfache grafische Interpretation gefunden werden kann.

6 | Fazit und Ausblick

Fazit

Unsere Untersuchung der Split Helicity Amplituden hat zu einem besseren Verständnis des bestehenden Lösungsvorschlages geführt. Es wurden sowohl Fehler für $q = 2$ und 3 in der Formulierung der Lösung korrigiert, als auch ein alternativer Lösungsansatz angegeben. Letzterer ist besonders für $n - q < q$ wesentlich effizienter. Durch das Zusammenspiel beider Ansätze war es uns außerdem möglich eine formale Lösung zu konstruieren, welche die Paritätseigenschaften der Theorie respektiert.

In unserem steten Bemühen die elementaren Grundlagen der Lösung zu finden, konnten wir ferner zeigen, dass der vorhandene Ansatz auf einer Zerlegung der Split Helicity Amplituden in MHV Amplituden beruht, während sich der neue Vorschlag aus \overline{MHV} Amplituden zusammensetzt. Dazu haben wir den ursprünglichen Beweisgedanken konsequent verallgemeinert und die notwendigen Ausdrücke abgeleitet.

Mittels des erweiterten Verfahrens ist es nun theoretisch möglich sukzessive Formeln für Amplitudenklassen zu entwickeln, bei denen die Helizitätsblockstruktur immer weiter defragmentiert. Doch schon die Untersuchung der nächst schwierigeren Klasse, den contaminated Split Helicity Amplituden, erfordert bedeutend mehr Aufwand bei der Gewinnung einer kompakten Formel. Es ist daher absehbar, dass diese Methode nur bedingt geeignet ist um per Hand, für beliebiges q und n , analytische Ausdrücke zu berechnen.

Ausblick

Trotz der angesprochenen Schwierigkeiten wäre es sehr hilfreich eine kompakte Formel für contaminated Split Helicity Amplituden zu entwickeln. Erste viel versprechende Resultate in dieser Richtung konnten in dieser Arbeit schon erreicht werden. Spannend ist dabei vor allem die Frage ob es erneut möglich ist eine diagrammatische Veranschaulichung zu geben. Eventuell ließe sich sogar auf grafischem Wege eine effiziente Methode zur Berechnung finden, die Potential zur Verallgemeinerung hat. Die Lösung der contaminated Split Helicity Amplituden wäre dabei nicht nur die Basis für Amplituden mit zwei gleichen Dotierungen, sondern auch für Amplituden vom Typ

$$A \left(\overset{1}{-}, \dots, \overset{m-1}{-}, \overset{\mathbf{m}}{+}, \overset{m+1}{-}, \dots, \overset{q}{-}, \overset{q+1}{+}, \dots, \overset{l-1}{+}, \overset{1}{-}, \overset{l+1}{+}, \dots, \overset{n}{+} \right).$$

Hierbei handelt es sich um aussichtsreiche Kandidaten für eine Mischung von MHV und \overline{MHV} Anteilen, was zu interessanten Neuerungen führen kann.

Daneben wäre es interessant zu sehen in wie weit die bisherigen Erkenntnisse für Schleifendiagramme hilfreich sind.

Vor dem Hintergrund der bald startenden Experimente am LHC sind systematische Untersuchungen außerhalb des masselosen Sektors, wie schon in {14} geschehen, ebenfalls von großem Interesse. Auch hier stellt sich die Frage, ob ein einheitliches Verfahren konstruiert werden kann und wie viel Mehraufwand zur Erzeugung weiterer kompakter Ergebnisse notwendig ist.

A | Algebraische Eigenschaften der Generatoren von $SU(N)$

E 1: Die Menge der $(T^k)_{k=1}^{N^2-1}$ formt eine Lie Algebra, also gilt

$$T^i T^j - T^j T^i =: [T^i, T^j] = i f^{ijk} T^k \quad (f^{ijk} - \text{antisymmetrisch}). \quad (\text{A.1})$$

E 2: Die gewählte Darstellung sei hermitesch und antisymmetrisch, d.h.

$$\begin{aligned} (T^i)_a^b &= - (T^i)_b^a & \Rightarrow Sp(T^i) &= 0 \\ (T^i)^* &= T^i. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

E 3: Da eine der Grundlagen einer Lie Algebra ein Vektorraum ist, existiert auf der Menge der $(T^k)_{k=1}^{N^2-1}$ ein normierbares Skalarprodukt. Es ist bestimmt durch

$$Sp(T^i T^j) = \frac{1}{\kappa} \delta^{ij} \quad \kappa - \text{Normierungsparameter}. \quad (\text{A.3})$$

E 4: Die Generatoren spannen zusammen mit der Identität den Raum der komplexen $N \times N$ Matrizen auf, so dass im speziellen

$$T^j T^j = \frac{1}{\kappa N} \delta^{jj} \mathbb{1}_N + h^{ijk} T^k \quad (\text{A.4})$$

ist. Der Faktor $\frac{1}{\kappa N}$ trägt dabei dem Skalarprodukt Rechnung.

Es gilt dann sicher auch

$$T^i T^j + T^j T^i =: \{T^i, T^j\} = \frac{2}{\kappa N} \delta^{ij} \mathbb{1}_N + g^{ijk} T^k, \quad (g^{ijk} - \text{symmetrisch}) \quad (\text{A.5})$$

weshalb sich (A.4) schreiben läßt als

$$T^j T^j = \frac{1}{\kappa N} \delta^{jj} \mathbb{1}_N + \frac{1}{2} (g^{ijk} + i f^{ijk}) T^k. \quad (\text{A.6})$$

Hieraus können wir wiederum auf

$$\sum_i T^i T^i = (N^2 - 1) \frac{1}{\kappa N} \mathbb{1}_N = \frac{N}{\kappa} \mathbb{1}_N - \frac{1}{\kappa N} \mathbb{1}_N \quad (\text{A.7})$$

folgern, was sich in Matrixnotation als

$$\kappa \sum_i (T^i)_a^b (T^i)_c^d = \delta_c^b \delta_a^d - \frac{1}{N} \delta_a^b \delta_c^d \quad (\text{A.8})$$

liest, und gerade die in Kapitel 1 vorgestellte Kontraktionsgleichung (1.5) ist.

B | Zerlegung von $\mathfrak{so}(1, 3)$

Ausgangspunkt bildet die Lorentzalgebra mit

$$[M_{\mu\nu}, M_{\kappa\rho}] = i(\eta_{\nu\rho}M_{\mu\kappa} + \eta_{\mu\kappa}M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\kappa}M_{\mu\rho} - \eta_{\mu\rho}M_{\nu\kappa}) \quad (\text{B.1})$$

Schritt 1: Zerlegung

Definieren wir durch

$$\begin{aligned} M_{ij} &\equiv \epsilon_{ijk}J_k \rightarrow J_k = \frac{1}{2}\epsilon_{kij}M_{ij} \\ M_{0i} &\equiv K_i \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

die Rotationen bzw. „Booster“, so ergibt sich

$$[K_i, K_j] = \dots = i\epsilon_{ijl}J_l \quad (\text{B.3})$$

$$[J_i, J_l] = \dots = -i\epsilon_{ilk}J_k \quad (\text{B.4})$$

$$[J_i, K_l] = \dots = -i\epsilon_{ijl}K_l. \quad (\text{B.5})$$

Schritt 2: Entkopplung

Die Gleichungen (B.3) - (B.5) lassen sich durch

$$N_i^\pm = -\frac{1}{2}(J_i \pm iK_i) \quad (\text{B.6})$$

entkoppeln, so dass dann

$$[N_i^+, N_j^+] = i\epsilon_{ijk} N_k^+ \quad [N_i^-, N_j^-] = i\epsilon_{ijk} N_k^- \quad (\text{B.7})$$

$$[N_i^+, N_j^-] = 0 \quad (N_i^\pm)^\dagger = N_i^\pm \quad (\text{B.8})$$

gilt.

Das heißt aber

$$\boxed{\mathfrak{so}(1, 3) = \mathfrak{su}(2)_\mathbb{C} \otimes \mathfrak{su}(2)_\mathbb{C}}$$

Definition. Die Darstellung

a) $D\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ist gegeben durch $J_i = iK_i$ mit $K_i = i\frac{\sigma_i}{2}$,

b) $D\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ist gegeben durch $J_i = -iK_i$ mit $K_i = i\frac{\sigma_i}{2}$.

Beide Darstellungen sind inäquivalent.

Bemerkung.

1. Jede Darstellung der Lorentzgruppe kann aus $D\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ und $D\left(0, \frac{1}{2}\right)$ zusammengesetzt werden.
2. Die Klassifizierung der Darstellung erfolgt über das Paar (n, m) , also den Eigenwerten der Kasimiroperatoren $N_i^\pm N_i^\pm$.
3. Die Dimension der Darstellung ist $\dim_{(n,m)} = (2n + 1)(2m + 1)$, entsprechend den Eigenwerten von N_3^\pm .
4. Der Gesamtspin der Darstellung ist $n + m$.

C

Bracketkalkül als Anwendung des 2d Spinorkalküls

Ausgehend von Kapitel 2 präsentiere ich hier einige der im Text am häufigsten genutzten Relationen. Grundlage bilden dabei die Ergebnisse aus den Abschnitten 2.1 und 2.2. Wie bisher auch benutzen wir die sehr ökonomische Schreibweise

$$(P_r)_{A\dot{A}} = P_r = \lambda_r \tilde{\lambda}_r = r \tilde{r}. \quad (\text{C.1})$$

Wenn wir beachten, dass die reaktive Stellung von ko- zu kontravarianten Spinoren beliebig ist, so folgt

$$\begin{aligned} P_r \lambda_i &\stackrel{(2.15)}{=} \langle r i \rangle \tilde{\lambda}_r =: P_r |i\rangle \\ &\stackrel{(2.6)}{=} -\langle i r \rangle \tilde{\lambda}_r = -\langle i | P_r \\ P_r \tilde{\lambda}_j &= \lambda_r [r j] = P_r |j\rangle \\ &= -[j r] \lambda_r = -[j | P_r \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

genauso wie

$$\begin{aligned} P_r \lambda_i \tilde{\lambda}_j &\stackrel{(2.15)}{=} \langle r i \rangle [r j] \stackrel{(2.6)}{=} -\langle i r \rangle [r j] = -\langle i | P_r | j \rangle \\ &\stackrel{(2.6)}{=} -[j r] \langle r i \rangle = -[j | P_r | i \rangle. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Im nächsten Schritt betrachten wir Objekte die quadratisch in den Impulsen sind.

$$\begin{aligned} \langle i | P_r P_s | j \rangle &= \langle i r \rangle [r s] \langle s j \rangle \\ &\stackrel{(C.3)}{=} \langle i | P_r | s \rangle \langle s j \rangle \\ &\stackrel{(C.3)}{=} \langle i r \rangle [r | P_s | j \rangle \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Analoges gilt für äußere eckige Klammern. Wir betrachten abschließend hierzu noch kubische Konstruktionen, deren Struktur aus (C.3) und (C.4) bereits klar sein sollte:

$$\begin{aligned}
 \langle i | P_r P_s P_t | j \rangle &= \langle i r | [r s] \langle s t | [t j] \\
 &\stackrel{(C.4)}{=} \langle i | P_r P_s | t \rangle [t j] \\
 &\stackrel{(C.3)}{=} \langle i | P_r | s \rangle \langle s | P_t | j \rangle = \langle i | P_r | s \rangle [j | P_t | s].
 \end{aligned} \tag{C.5}$$

Wir können daraus die Regel

Gleichartige äußere Klammersymbole schließen eine geradzahlige Anzahl an Impulsfaktoren ein, verschiedenartige entsprechend eine ungerade.
ablesen.

Eine weitere sehr hilfreiche Beziehung ist, wie schon erwähnt, die Schouten Identität (2.9). Mit ihrer Hilfe lassen sich quadratische Objekte mitunter sehr stark vereinfachen. Als Einstimmung betrachten wir die (schon zerlegte) Summe

$$\begin{aligned}
 s_{ab} &= \langle x a | [a b] \langle b y \rangle + \langle x b | [b a] \langle a y \rangle \\
 &= [a b] \langle x a \rangle \langle b y \rangle + [a b] \langle x b \rangle \langle y a \rangle.
 \end{aligned} \tag{C.6}$$

Aus der Schouten Identität folgt nun,

$$\begin{aligned}
 0 &= \langle x a \rangle \langle b y \rangle + \langle x y \rangle \langle a b \rangle + \langle x b \rangle \langle y a \rangle \\
 &\Leftrightarrow \langle x a \rangle \langle b y \rangle + \langle x b \rangle \langle y a \rangle = -\langle a b \rangle \langle x y \rangle
 \end{aligned} \tag{C.7}$$

und so

$$s_{ab} = -[a b] \langle a b \rangle \langle x y \rangle = -\langle x y \rangle P_a P_b. \tag{C.8}$$

In einem typischen quadratischen Ausdruck wie $\langle x | P_{ij} P_{ij} | y \rangle$ repräsentiert s_{ab} selbst jedoch nur einen einzigen Summanden. Dank unserer Vorüberlegungen können wir den größeren Term jetzt aber gut verarbeiten:

$$\begin{aligned}
 \langle x | P_{i,j} P_{i,j} | y \rangle &= \sum_{a=i}^j \sum_{\substack{b=i \\ a \neq b}}^j s_{ab} = - \sum_{\substack{a,b=i \\ a \neq b}}^j \langle x y \rangle P_a P_b \\
 &= -\frac{1}{2} \langle x y \rangle \sum_{\substack{a,b=i \\ a \neq b}}^j (P_a P_b + P_b P_a) \\
 &\stackrel{P_a^2=0}{=} -\frac{1}{2} \langle x y \rangle \sum_{a,b=i}^j (P_a P_b + P_b P_a) = -\langle x y \rangle P_{i,j}^2.
 \end{aligned} \tag{C.9}$$

Natürlich verlaufen alle diese Rechnungen im Fall äußerer eckiger Klammern analog. Wir verallgemeinern daher das Ergebnis leicht zu,

$$X | P_{i,j} P_{i,j} | Y = - X | Y P_{i,j}^2 \tag{C.10}$$

wo X und Y beliebig zusammengesetzte 2d Spinorausdrücke bezeichnen.

D

MHV Zerlegung von $A_{4,n-4}$

Nach Abschnitt 4.8 ist (bei Unterdrückung der Indizes):

$$\begin{aligned}
A_{4,n-4} &= \sum_{l_2=0}^{n-(q+2)-l_1} \sum_{l_1=0}^{n-(q+2)} d_{l_2} \times d_{l_1} A(\hat{3}^-, 4^-, 5^+, \dots, \widehat{n-L_2}^+) \\
&= \sum_{l_2=1}^{n-(q+2)-l_1} \sum_{l_1=0}^{n-(q+2)} d_{l_2} \times d_{l_1} \frac{\langle \hat{3} 4 \rangle^3}{F_{4,n-(L_2+1)} \langle n - (L_2 + 1) \widehat{n-L_2} \rangle \langle \widehat{n-L_2} \hat{3} \rangle} \\
&\quad + \sum_{l_1} d_{l_2=0} \times d_{l_1} \frac{\langle \hat{3} 4 \rangle^3}{F_{4,n-(l_1+1)} \left\{ \langle n - (l_1 + 1) \widehat{n-L_2} \rangle \langle \widehat{n-L_2} \hat{3} \rangle \right\}_{|_{l_2=0}}}
\end{aligned} \tag{D.1}$$

mit

$$\begin{aligned}
d_{l_1} &= -\frac{\langle 1 | P_{2,n-(l_1+1)} | 2 \rangle}{\langle n-l_1 | P_{2,n-(l_1+1)} | 2 \rangle} \times \frac{\langle n-l_1 1 \rangle^2}{P_{2,n-(l_1+1)}^2 F_{n-l_1,1}} \\
d_{l_2} &= -\frac{\langle n-L_2 \hat{2} \rangle^2}{\langle n-(l_1+1) \widehat{n-l_1} \rangle \langle \widehat{n-l_1} \hat{2} \rangle} \times \frac{\langle \hat{2} | P_{3,n-(L_2+1)} | 3 \rangle}{\langle n-L_2 | P_{3,n-(L_2+1)} | 3 \rangle} \\
&\quad \times \frac{1}{\delta_{0,l_2} + (1-\delta_{0,l_2}) F_{n-L_2,n-(l_1+1)}} \times \frac{1}{P_{3,n-(L_2+1)}^2} \\
\langle \hat{3} 4 \rangle &= \frac{\langle 1 | P_{n-l_1,1} P_{n-l_1,2} P_{n-L_2,2} P_{n-L_2,3} | 4 \rangle}{\langle \hat{2} | P_{n-L_2,2} | 3 \rangle \langle 1 | P_{n-l_1,1} | 2 \rangle} \\
\langle n - (L_2 + 1) \widehat{n-L_2} \rangle &= -\langle n-L_2 \hat{2} \rangle \frac{\langle n - (L_2 + 1) | P_{n-L_2,2} | 3 \rangle}{\langle \hat{2} | P_{n-L_2,2} | 3 \rangle} \\
\langle \widehat{n-L_2} \hat{3} \rangle &= \langle n-L_2 \hat{2} \rangle \frac{\langle \hat{2} | P_{n-L_2,2} P_{n-L_2,3} P_{n-L_2,2} | 3 \rangle}{\langle \hat{2} | P_{n-L_2,2} | 3 \rangle^2} \\
&\stackrel{(C.10)}{=} -\langle n-L_2 \hat{2} \rangle \frac{P_{n-L_2,3}^2}{\langle \hat{2} | P_{n-L_2,2} | 3 \rangle}
\end{aligned} \tag{D.2}$$

und

$$\begin{aligned}
d_{l_2=0} &= -\frac{\langle \widehat{n-l_1} \hat{2} \rangle \langle \hat{2} | P_{n-l_1,2} | 3 \rangle}{P_{n-l_1,2}^2 \langle \widehat{n-l_1} | P_{n-l_1,2} | 3 \rangle} \\
&\quad \langle \hat{3} 4 \rangle \stackrel{l_2=0}{=} -P_{n-l_1,2}^2 \frac{\langle 1 | P_{n-l_1,1} P_{n-l_1,3} | 4 \rangle}{\langle \hat{2} | P_{n-l_1,2} | 3 \rangle \langle 1 | P_{n-l_1,1} | 2 \rangle} \\
\langle n - (l_1 + 1) \widehat{n-L_2} \rangle_{|l_2=0} &= -\langle n - (\widehat{l_1+1}) \hat{2} \rangle \frac{\langle n - (l_1 + 1) | P_{n-l_1,2} | 3 \rangle}{\langle \hat{2} | P_{n-l_1,2} | 3 \rangle} \quad (D.3) \\
\langle \widehat{n-L_2} \hat{3} \rangle_{|l_2=0} &= \langle \widehat{n-l_1} \hat{2} \rangle \frac{\langle \hat{2} | P_{n-l_1,2} P_{n-l_1,3} P_{n-l_1,2} | 3 \rangle}{\langle \hat{2} | P_{n-l_1,2} | 3 \rangle^2} \\
&\stackrel{(C.10)}{=} -\langle \widehat{n-l_1} \hat{2} \rangle \frac{P_{n-l_1,3}^2}{\langle \hat{2} | P_{n-l_1,2} | 3 \rangle}.
\end{aligned}$$

Wir erhalten dann als Zwischenergebnis

$$\begin{aligned}
A_{4,n-4} &= \sum_{l_2 \neq 0} \sum_{l_1} \frac{\langle n-l_1 1 \rangle^2}{\langle \widehat{n-l_1} \hat{2} \rangle \langle n - (l_1 + 1) \widehat{n-l_1} \rangle \langle 1 | P_{n-l_1,1} | 2 \rangle^2} \\
&\quad \times \frac{1}{P_{2,n-(l_1+1)}^2 P_{3,n-(L_2+1)}^2 P_{n-L_2,3}^2} \\
&\quad \times \frac{\langle 1 | P_{n-l_1,1} P_{n-l_1,2} P_{n-L_2,2} P_{n-L_2,3} | 4 \rangle^3}{F_{4,n-(L_2+1)} F_{n-L_2,n-(l_1+1)} F_{n-l_1,1}} \\
&\quad \times \frac{1}{\langle n-l_1 | P_{2,n-(l_1+1)} | 2 \rangle [3] P_{3,n-(L_2+1)} | n-L_2 \rangle \langle n - (L_2 + 1) | P_{n-L_2,2} | 3 \rangle} \\
&+ \sum_{l_1} \frac{\langle n-l_1 1 \rangle^2}{\langle \widehat{n-l_1} \hat{2} \rangle \langle \widehat{n-l_1} | P_{n-l_1,2} | 3 \rangle \langle 1 | P_{n-l_1,1} | 2 \rangle^2} \times \frac{-P_{n-l_1,2}^4}{P_{2,n-(l_1+1)}^2 P_{n-l_1,3}^2} \\
&\quad \times \frac{1}{F_{4,n-(l_1+1)} F_{n-l_1,1}} \times \frac{\langle 1 | P_{n-l_1,1} P_{n-l_1,3} | 4 \rangle^3}{[2] P_{n-l_1,1} | n-l_1 \rangle \langle n - (l_1 + 1) | P_{n-l_1,2} | 3 \rangle}. \quad (D.4)
\end{aligned}$$

Weil

$$\begin{aligned}
\langle n - (l_1 + 1) | \widehat{n - l_1} \rangle &= -\langle n - l_1 | 1 \rangle \frac{\langle n - (l_1 + 1) | P_{2, n-(l_1+1)} | 2 \rangle}{\langle 1 | P_{2, n-(l_1+1)} | 2 \rangle} \\
\langle \widehat{n - l_1} | \widehat{2} \rangle &= \langle n - l_1 | 1 \rangle \frac{\langle 1 | P_{2, n-(l_1+1)} P_{n-l_1, 2} P_{2, n-(l_1+1)} | 2 \rangle}{\langle 1 | P_{2, n-(l_1+1)} | 2 \rangle^2} \\
&\stackrel{(C.10)}{=} \langle n - l_1 | 1 \rangle \frac{P_{n-l_1, 2}^2}{\langle 1 | P_{2, n-(l_1+1)} | 2 \rangle} \\
\langle \widehat{n - l_1} | P_{n-l_1, 2} | 3 \rangle &= -\langle n - l_1 | 1 \rangle \frac{[3 | P_{n-l_1, 2} P_{n-l_1, 2} | 2 \rangle]}{\langle 1 | P_{2, n-(l_1+1)} | 2 \rangle} \\
&\stackrel{(C.10)}{=} \langle n - l_1 | 1 \rangle \frac{[3 | 2] P_{n-l_1, 2}^2}{\langle 1 | P_{2, n-(l_1+1)} | 2 \rangle}
\end{aligned} \tag{D.5}$$

gilt, läßt sich (D.4) umformen zu

$$\begin{aligned}
A_{4, n-4} &= \sum_{l_2 \neq 0} \sum_{l_1} \frac{\langle n - L_2 | n - (L_2 + 1) \rangle \langle n - l_1 | n - (l_1 + 1) \rangle}{P_{2, n-(l_1+1)}^2 P_{n-l_1, 2}^2 P_{3, n-(L_2+1)}^2 P_{n-L_2, 3}^2 F_{4, n}} \\
&\times \frac{\langle 1 | P_{2, n-(l_1+1)} P_{n-l_1, 2} P_{3, n-(L_2+1)} P_{n-L_2, 3} | 4 \rangle^3}{[2 | P_{2, n-(l_1+1)} | n - (l_1 + 1) \rangle \langle n - l_1 | P_{n-l_1, 2} | 2 \rangle]} \\
&\times \frac{1}{[3 | P_{3, n-(L_2+1)} | n - L_2 \rangle \langle n - (L_2 + 1) | P_{n-L_2, 3} | 3 \rangle]} \\
&+ \sum_{l_1} \frac{\langle n - l_1 | n - (l_1 + 1) \rangle}{P_{2, n-(l_1+1)}^2 P_{n-l_1, 3}^2 F_{4, n} \overline{F}_{2, 3}} \\
&\times \frac{\langle 1 | P_{2, n-(l_1+1)} P_{n-l_1, 3} | 4 \rangle^3}{[2 | P_{2, n-(l_1+1)} | n - (l_1 + 1) \rangle \langle n - l_1 | P_{n-l_1, 3} | 3 \rangle]}.
\end{aligned} \tag{D.6}$$

Das ist aber gerade das Ergebnis der Split Helicity Lösung!

Literaturverzeichnis

- [1] CVITANOVIĆ, Predrag: GROUP THEORY FOR FEYNMAN DIAGRAMS IN NON ABELIAN FIELD THEORIES. In: *Phys. Rev D* 14 (1976), S. 1537ff.
- [2] PARKE, S.J. ; TAYLOR, T.R.: An Amplitude For N Gluon Scattering. In: *Phys. Rev. Lett.* 56 (1986), S. 2459
- [3] BERENDS, F.A. ; GIELE, W.: Recursive Calculation For Processes with N Gluons. In: *Nucl. Phys.* B306 (1988), S. 759ff.
- [4] BERN, Zvi ; DIXON, Lance J. ; DUNBAR, David C. ; KOSOWER, David A.: One-loop n-point gauge theory amplitudes, unitarity and collinear limits. In: *Nucl. Phys.* B425 (1994), S. 217ff.. – hep-ph/9403226
- [5] EDEN, R.J. ; LANDSHOFF, P.V. ; D.I.OLIVE ; POLKINGHORNE, J.C.: *The Analytic S Matrix*. Cambridge University Press, 1966
- [6] WITTEN, Edward: Perturbative Gauge Theory As A String Theory in Twistor Space. In: *Commun.Math.Phys.* 252ff. (2004), S. 189. – hep-th/0312171
- [7] CACHAZO, Freddy ; SVRČEK, Peter ; WITTEN, Edward: MHV Vertices and Tree Amplitudes In Gauge Theory. In: *JHEP* 0409 (2004), Nr. 006. – hep-th/0403047
- [8] BRITTO, Ruth ; CACHAZO, Freddy ; FENG, Bo: New Recursion Relations for Tree Amplitudes of Gluons. In: *Nucl.Phys.* B715 (2005), S. 499ff.. – hep-th/0412308
- [9] BERGER, Carola F. ; BERN, Zvi ; DIXON, Lance J. ; FORDE, Darren ; KOSOWER, David A.: On-Shell Unitarity Bootstrap for QCD Amplitudes. In: *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements* 160 (2006), S. 261. – hep-ph/0610098
- [10] BADGE, S. D. ; GLOVER, E. W. N. ; KHOZE, V. V. ; SVRČEK, P.: Recursion Relations for Gauge Theory Amplitudes with Massive Particles. In: *JHEP* 0507 (2005), Nr. 025. – hep-th/0504159
- [11] CACHAZO, Freddy ; SVRČEK, P.: Tree Level Recursion Relations In General Relativity. (2005). – hep-th/0502160
- [12] KOSOWER, David A.: Next-to-Maximal Helicity Violating Amplitudes in Gauge Theory. In: *Phys.Rev.* D71 (2005), Nr. 045007. – hep-th/0406175

- [13] BRITTO, Ruth ; FENG, Bo ; ROIBAN, Radu ; SPRADLIN, Marcus ; VOLOVICH, Anastasia: All Split Helicity Tree-Level Gluon Amplitudes. In: *Phys.Rev.* D71 (2005), Nr. 105017. – hep-th/0503198
- [14] SWINN, Chrisitan ; WEINZIERL, Stefan: On-shell recursion relations for all Born QCD amplitudes. In: *JHEP* 0704 (2007), Nr. 072. – hep-ph/0703021
- [15] BOELS, Rutger ; MASON, Lionel ; SKINNER, David: *From Twistor Actions to MHV Diagrams*. 2007. – hep-th/0702035
- [16] MANGANO, Michelangelo L. ; PARKE, Stephen J.: MULTI-PARTON AMPLITUDES IN GAUGE THEORIES. In: *Phys. Rept.* 200 (1991), S. 301ff. – hep-th/0509223
- [17] DIXON, Lance J.: *CALCULATING SCATTERING AMPLITUDES EFFICIENTLY*. 1996. – hep-ph/9601359
- [18] BERN, Zvi ; KOSOWER, David A.: Color Decomposition Of One Loop Amplitudes In Gauge Theories. In: *Nucl. Phys.* B362 (1991), S. 389ff.
- [19] RYDER, Lewis H.: *QUANTUM FIELD THEORY*. 2nd. Cambridge Univerity Press, 1996. – ISBN 0521478146
- [20] BERENDS, F.A. ; GIELE, W.: The SIX-GLUON PROCESS AS AN EXAMPLE OF WEYL-VAN DER WAERDEN SPINOR CALCULUS. In: *Nucl. Phys.* B294 (1987), S. 700ff.
- [21] DITTMAYER, Stefan: *Weyl-van-der-Waerden formalism for helicity amplitudes of massive particles*. 1998. – hep-ph/9805445
- [22] RAMOND, Pierre: *Field Theory: A Modern Primer*. 2nd. Addison-Wesley, 1990. – 8ff S. – ISBN 0201546116
- [23] TICCIATI, Robin: *Quantum Field Theory for Mathematicians*. Cambridge Univerity Press, 1999. – ISBN 052163265X
- [24] BRITTO, Ruth ; CACHAZO, Freddy ; FENG, Bo ; WITTEN, Edward: Direct Proof Of Tree-Level Recursion Relation In Yang-Mills Theory. In: *Phys. Rev. Lett.* 94 (2005), Nr. 181602. – hep-th/0501052
- [25] RISAGER, Kasper: A direct proof of the CSW rules. In: *JHEP* 0512 (2005), Nr. 003. – hep-th/0508206
- [26] BERN, Zvi ; DIXON, Lance J. ; KOSOWER, David A.: *On-Shell Methods in Perturbative QCD*. 2007. – arxiv:0704.2798

- [27] DETIG, Christine: *Der L^AT_EX-Wegweiser*. 2nd. mitp, 2004. – ISBN 3826614143
- [28] GOOSSENS, Michael ; MITTELBACH, Frank ; SAMARIN, Alexander: *Der L^AT_EX Begleiter*. 2nd. Addison-Wesley, 2004. – ISBN 3826614143
- [29] KOPKA, Helmut: *L^AT_EX, Band 1: Einführung*. 3rd. Cambridge University Press, 2005. – ISBN 978-3827370389
- [30] KOHM, Markus ; MORAWSKI, Jens-Uwe: *KOMA-Script- Die Anleitung: Eine Sammlung von Klassen und Paketen für L^AT_EX 2_ε*. 2nd. Lehmanns, 2005. – ISBN 978-3865410894

Hilfsmittel

Diese Diplomarbeit wurde mit $\text{\LaTeX}2_{\epsilon}$ unter Benutzung von KOMA-Script und shadethm sowie \BIBTeX , zusammen mit den Paketen natbib und dinat, gesetzt. Die Zeichnungen entstanden zum Teil unter Einbindung der Font *feyn*.

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, die vorliegende Diplomarbeit selbständig sowie ohne unerlaubte fremde Hilfe verfasst und keine andere, außer den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln, verwendet zu haben.

Mit der Auslage meiner Diplomarbeit in den Bibliotheken der Humboldt-Universität zu Berlin bin ich einverstanden.

Berlin, den 24. Februar 2009

Ralf Sattler